

REGULÄRE DREIECKPFLASTERUNG KONVEXER POLYGONE

Eike Hertel

Friedrich-Schiller-Universität Jena, Mathematisches Institut,
Ernst-Abbe-Platz 1–2, D–07743 Jena, Germany
e-mail: eike.hertel@uni-jena.de

Abstract

We give a complete characterization of all convex n -gons that can be tiled with congruent equilateral triangles and we determine for given n the set of all numbers k for which an n -gon exists with such a regular tiling into k triangles, except for $n = 5$.

1 Einleitung

Unter einem *konvexen Polygon* \mathcal{P} verstehen wir die konvexe Hülle $\mathcal{P} = \text{conv}\{A_1, \dots, A_n\}$ von $n \geq 3$ Punkten A_i der euklidischen Ebene, die nicht alle auf derselben Geraden liegen. Kann von den Punkten A_i keiner weggelassen werden, ohne diese konvexe Hülle zu verändern, so heißen die Punkte A_i *Eckpunkte* von \mathcal{P} , und wir nennen $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n =: A_1A_2\dots A_n$ ein n -Eck. Der Rand von \mathcal{P}^n besteht bei geeigneter Nummerierung der Eckpunkte aus den Strecken A_iA_{i+1} ($i = 1, \dots, n-1$) und A_nA_1 , den *Seiten* von \mathcal{P}^n . Ein Polygon \mathcal{P} heißt (elementargeometrische) *Summe* der k Polygone \mathcal{Q}_i bzw. in die Teilpolygone \mathcal{Q}_i *zerlegt*, wenn \mathcal{P} die Vereinigungsmenge der \mathcal{Q}_i ist und diese paarweise innendisjunkt sind:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \quad \wedge \quad \text{int}(\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j) = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq k).$$

Während die Tatsache, dass jedes n -Eck für alle natürlichen Zahlen $k \geq n-2$ in k Dreiecke zerlegt werden kann, zur elementaren Schulgeometrie gehört, ist die Frage nach den zulässigen Tripeln (n, k, m) , so daß jedes n -Eck in k m -Ecke zerlegt werden kann nur für spezielle *edge-to-edge-Zerlegungen*¹ beantwortet (vgl. [B-S]). Und selbst bei der Beschränkung auf $m = 3$ (Dreieckszerlegungen von Polygonen) ergeben sich reizvolle Fragestellungen. So wurde in [Yu] die Frage nach der Polygonzerlegung in spitzwinklige Dreiecke behandelt,

¹je 2 verschiedene Teilpolygone der Zerlegung haben keinen oder genau einen Punkt gemeinsam oder eine ganze Seite

in [K-S] die in inhaltsgleiche und in [La1] in paarweise ähnliche Dreiecke. In [La2] beantwortet *M. Laczkovich* die Frage nach den Dreieckstypen \mathcal{D} , für die zu einem gegebenen Polygon eine Zerlegung in zu \mathcal{D} kongruente Dreiecke existiert. Im folgenden wird gewissermaßen die umgekehrte Fragestellung betrachtet: Gegeben ist ein Dreieckstyp \mathcal{D} , und gesucht sind alle Polygone \mathcal{P} , die eine Zerlegung in zu \mathcal{D} kongruente Dreiecke gestatten. Dabei beschränken wir uns in dieser Note auf *reguläre* (gleichseitige) Dreiecke \mathcal{D} . Eine solche Zerlegung

$$(1) \quad \mathcal{P}^n = \sum_{i=1}^k \mathcal{D}_i \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_i \cong \mathcal{D}_1 \quad (i = 1, \dots, k)$$

eines n -Ecks \mathcal{P}^n in k paarweise kongruente reguläre Dreiecke \mathcal{D}_i nennen wir *reguläre Dreieckspflasterung* von \mathcal{P}^n . Wir geben eine vollständige Klassifikation der konvexen Polygone an, die eine solche reguläre Dreieckspflasterung erlauben, und bis auf einen Fall ($n = 5$) wird auch die Frage nach den möglichen Anzahlen k in diesen Pflasterungen beantwortet.

2 Dreiecke und Vierecke

Da die durch kongruente reguläre Dreiecke gepflasterten n -Ecke \mathcal{P}^n nur bis auf Ähnlichkeit interessieren, kann die Seitenlänge der Dreiecke mit 1 angenommen werden, so dass ein solches n -Eck

$$\mathcal{P}^n = (\alpha_1, a_1, \dots, \alpha_n, a_n)$$

durch die gemischte Folge seiner im positiven Umlaufsinn aufeinander folgenden Innenwinkelgrößen α_i und zugehörigen (ganzzahligen!) Seitenlängen a_i bis auf zyklische Umordnung als Typ eindeutig beschrieben wird. Dabei können die Innenwinkelgrößen von \mathcal{P}^n nur die Werte $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ annehmen, so dass für die Innenwinkelsumme von \mathcal{P}^n

$$(n-2)\pi = x \cdot \frac{\pi}{3} + y \cdot \frac{2\pi}{3}$$

gelten muss mit ganzen Zahlen $x, y \geq 0$ und

$$(1.1) \quad n = x + y,$$

woraus sich

$$(1.2) \quad 3n = x + 2y + 6$$

und schließlich

$$(1.3) \quad 2x + y = 6$$

ergibt. Daraus folgt $3 \leq n \leq 6$, und wir können die endlich vielen Lösungen der diophantischen Gleichungen (1.1), (1.2) und (1.3) angeben beginnend mit dem Fall $n = 3$, was sofort $x = 3$ und $y = 0$ zur Folge hat. \mathcal{P}^3 in der regulären Pflasterung (1) muss also selbst ein reguläres Dreieck sein, und die Anzahl k der Pflasterdreiecke muss eine Quadratzahl sein (vgl. Abb. 1). Bezeichnen wir mit \mathfrak{Z}_n die Menge aller positiven ganzen Zahlen $k \in \mathbb{N}^*$, für die ein n -Eck existiert, das eine reguläre Pflasterung in k Dreiecke gestattet, lässt sich ein

erstes einfaches Ergebnis formulieren in folgendem

Hilfssatz 1. Ein Dreieck \mathcal{D} kann genau dann in reguläre Dreiecke gepflastert werden, wenn \mathcal{D} selbst regulär ist, und es gilt $\mathfrak{Z}_3 = \{m^2 : m \in \mathbb{N}^*\}$.²

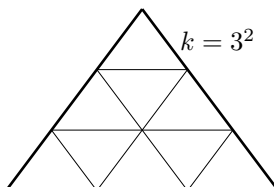


Abbildung 1: Reguläre Pflasterung des Dreiecks

Für Vierecke ($n = 4$) ist die Lösung der Gleichungen (1.1) und (1.2) $x = y = 2$, folglich hat das konvexe Viereck \mathcal{P}^4 in (1) entweder die geordnete Innenwinkelreihe $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (\mathcal{P}^4 ist ein Parallelogramm) oder $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (\mathcal{P}^4 ist ein gleichschenkliges Trapez) - es gilt also folgender

Hilfssatz 2. Ein konvexes Viereck \mathcal{P}^4 gestattet genau dann eine reguläre Dreieckspflasterung, wenn \mathcal{P}^4 entweder ein Parallelogramm $(\frac{\pi}{3}, a, \frac{2\pi}{3}, b, \frac{\pi}{3}, a, \frac{2\pi}{3}, b)$ mit $1 \leq a \leq b$ oder ein gleichschenkliges Trapez $(\frac{\pi}{3}, a, \frac{\pi}{3}, b, \frac{2\pi}{3}, a - b, \frac{2\pi}{3}, b)$ mit $1 \leq b < a$ ist, und es gilt $\mathfrak{Z}_4 = \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2\}$.

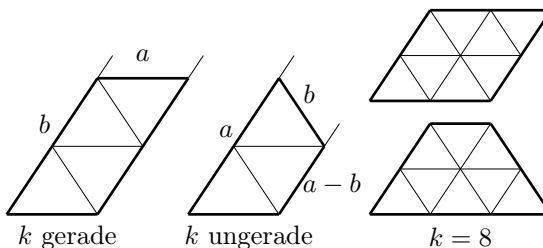


Abbildung 2: Reguläre Pflasterung des Vierecks

3 Fünfecke

Für Fünfecke ($n = 5$) ergibt sich als Lösung der Gleichungen (1.1) und (1.2) $x = 1$ und $y = 4$. Demnach gilt folgender

Hilfssatz 3. Ein konvexes Fünfeck \mathcal{P}^5 gestattet genau dann eine reguläre Dreieckspflasterung, wenn es vom Typ $(\frac{\pi}{3}, a, \frac{2\pi}{3}, b, \frac{2\pi}{3}, c, \frac{2\pi}{3}, a - c, \frac{2\pi}{3}, b + c)$ ist mit $0 < b, 0 < c < a$, und es gilt $\mathfrak{Z}_5 = \{k : k = 2a(b + c) - c^2 (a, b, c \in \mathbb{N}^*, c < a)\}$.

² $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Als Begründung dient die folgende Abbildung.

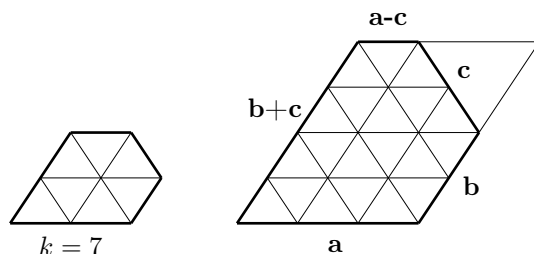


Abbildung 3: Reguläre Pflasterung des Fünfecks

Leider können wir die Menge \mathfrak{Z}_5 der möglichen Anzahlen k , für die ein Fünfeck existiert mit einer regulären k -Pflasterung, nicht explizit angeben. Mit

$$k = 2a(b+c) - c^2 = (a+b)^2 - (a-c)^2 - b^2$$

und $x := a+b$, $y := a-c$, $z := b$ lässt sich die Frage nach \mathfrak{Z}_5 auch "rein zahlentheoretisch" formulieren als folgendes

Problem. Man bestimme die Menge

$$M = \{k \in \mathbb{N}^* : k = x^2 - y^2 - z^2, x, y, z \in \mathbb{N}^*, y + z < x\}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass jede natürliche Zahl k als Quadratzahldifferenz $k = x^2 - y^2 - z^2$ dargestellt werden kann, wenn für x, y, z alle natürlichen Zahlen (einschließlich der 0) zugelassen sind. Aber durch die hier geforderten einschränkenden Bedingungen an x, y, z ist nicht einmal klar, ob die Ausnahmemenge endlich ist, ob also eine Zahl k_0 existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $k \in M$. Für $k \leq 60$ sind im Anhang alle regulären k -Pflasterungen von Fünfecken aufgelistet (Abb. 6 und Abb. 7).

4 Sechsecke

Für den letzten Fall der Sechsecke ($n = 6$) ergibt sich aus (1.1) und (1.2) $x = 0$ und $y = 6$. Demnach gilt folgender

Hilfssatz 4. Ein konvexes Sechseck \mathcal{P}^6 gestattet genau dann eine reguläre Dreieckspflasterung, wenn es vom Typ $(\frac{2\pi}{3}, a, \frac{2\pi}{3}, b, \frac{2\pi}{3}, c, \frac{2\pi}{3}, d, \frac{2\pi}{3}, a+b-d, \frac{2\pi}{3}, c+d-a)$ ist mit $1 \leq a, b, c, d$, $a < c+d$, $d < a+b$, und es gilt

$$\mathfrak{Z}_6 = \{k : k = 2(ac + bc + bd) - (a-d)^2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}^*, a < c+d, d < a+b\}.$$

Als Begründung dient wieder die folgende Abbildung 4. Insbesondere ist die Zählung für die Anzahl k der Pflasterdreiecke zu erkennen:

$$\begin{aligned} k &= 2 \cdot (b+c)(d+c) - c^2 - (c+d-a)^2 \\ &= 2(ac + bc + bd) - (a-d)^2. \end{aligned}$$

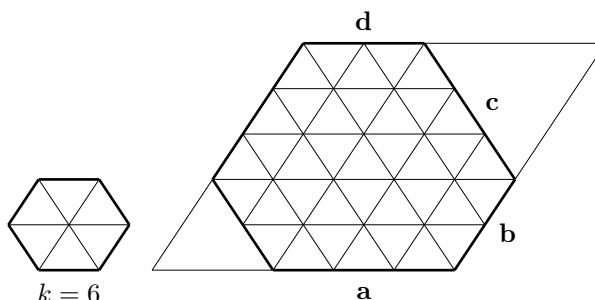


Abbildung 4: Reguläre Pflasterung des Sechsecks

Leider fehlt uns auch hier ein eleganter zahlentheoretischer Nachweis für die explizite Angabe der Zahlenmenge \mathfrak{Z}_6 . Mittels geometrisch-konstruktiver Methoden lässt sich aber \mathfrak{Z}_6 charakterisieren durch folgenden

Satz. Zu einer natürlichen Zahl k existiert genau dann ein konvexes Sechseck mit einer Pflasterung in k paarweise kongruente reguläre Dreiecke, wenn k aus folgender Menge ist

$$\mathfrak{Z}_6 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 20, 21, 23, 29, 36, 39, 41, 44, 84\}.$$

Beweis: In einem ersten Schritt werden (bis auf Ähnlichkeitsabbildungen) alle regulären k -Pflasterungen von Sechsecken mit Innenwinkeln der Größe $\frac{2\pi}{3}$ konstruiert für $k < 85$ nach einem systematischen Verfahren, welches aus der folgenden Abbildung hervorgeht.

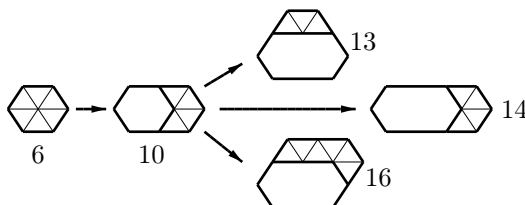


Abbildung 5: Erzeugung regulärer Sechseckpflasterungen

Das Ergebnis dieser Konstruktion ist mit der Kodierung $\mathcal{P}^6 = (k; a, b, c, d)$ für $k < 85$ in Tabelle 3 im Anhang aufgelistet. In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass zu jedem $k \geq 85$ ein Sechseck mit einer regulären k -Pflasterung existiert. Dazu führen wir zunächst den Begriff der "Dicke" eines Sechsecks $\mathcal{P}^6 = (k; a, b, c, d)$ ein durch $\delta_{xy} := x + y$, wenn x, y die Längen zweier aufeinanderfolgender Seiten von \mathcal{P}^6 sind. Jedes Sechseck $\mathcal{P}^6 = (k; a, b, c, d)$ hat also die drei Dicken $\delta_{ab}, \delta_{bc}, \delta_{cd}$, welche gewissermaßen die Abstände paralleler Seitenpaare des Sechsecks durch die Anzahl der dazwischenliegenden Dreiecksreihen messen. Damit ergibt sich aus der Existenz der k -Pflasterung eines Sechsecks der Dicke δ , dass auch alle Zahlen $m = k + 2 \cdot \delta$ in \mathfrak{Z}_6 liegen. Aus dem Sechseck $(6; 1, 1, 1, 1)$ der Dicke 2 in Abbildung 5 ergeben sich so die Zahlen $k \equiv 6 \pmod{4}$ in \mathfrak{Z}_6 .³ Wir konstruieren nun Sechsecke der Dicke 7 mit

³also $k = 6 + 4 \cdot m$ für alle $m \in \mathbb{N}$

regulären k -Pflasterungen für $85 \leq k \leq 97$:

k	a	b	c	d	k	a	b	c	d	k	a	b	c	d
85	4	5	2	5	89	3	6	1	8	94	5	3	4	5
86	3	6	1	7	90	5	2	5	5	95	7	1	6	4
87	5	3	4	4	92	6	3	4	4	96	6	6	1	6
88	6	1	6	4	93	5	6	1	6	97	4	5	2	7

Tabelle 1: Reguläre k -Pflasterungen von Sechsecken mit $\delta_{bc} = 7$ und $85 \leq k < 98$

Die geometrischen Realisierungen sind im Anhang (Abb. 8) angegeben. Leider existieren keine regulär k -pflasterbaren Sechsecke der Dicke 7 mit $k = 91$ und $k = 98$. Um diese Lücken zu schließen, werden jeweils 13 aufeinanderfolgende Sechsecke der Dicke $\delta_{bc} = 13$ betrachtet, so dass sich die Existenz von regulären k -Pflasterungen ergibt mit

$$(2.1) \quad k = 91 + 14 \cdot (r + 13 \cdot s) \quad \text{bzw.} \quad (2.2) \quad k = 98 + 14 \cdot (r + 13 \cdot s).$$

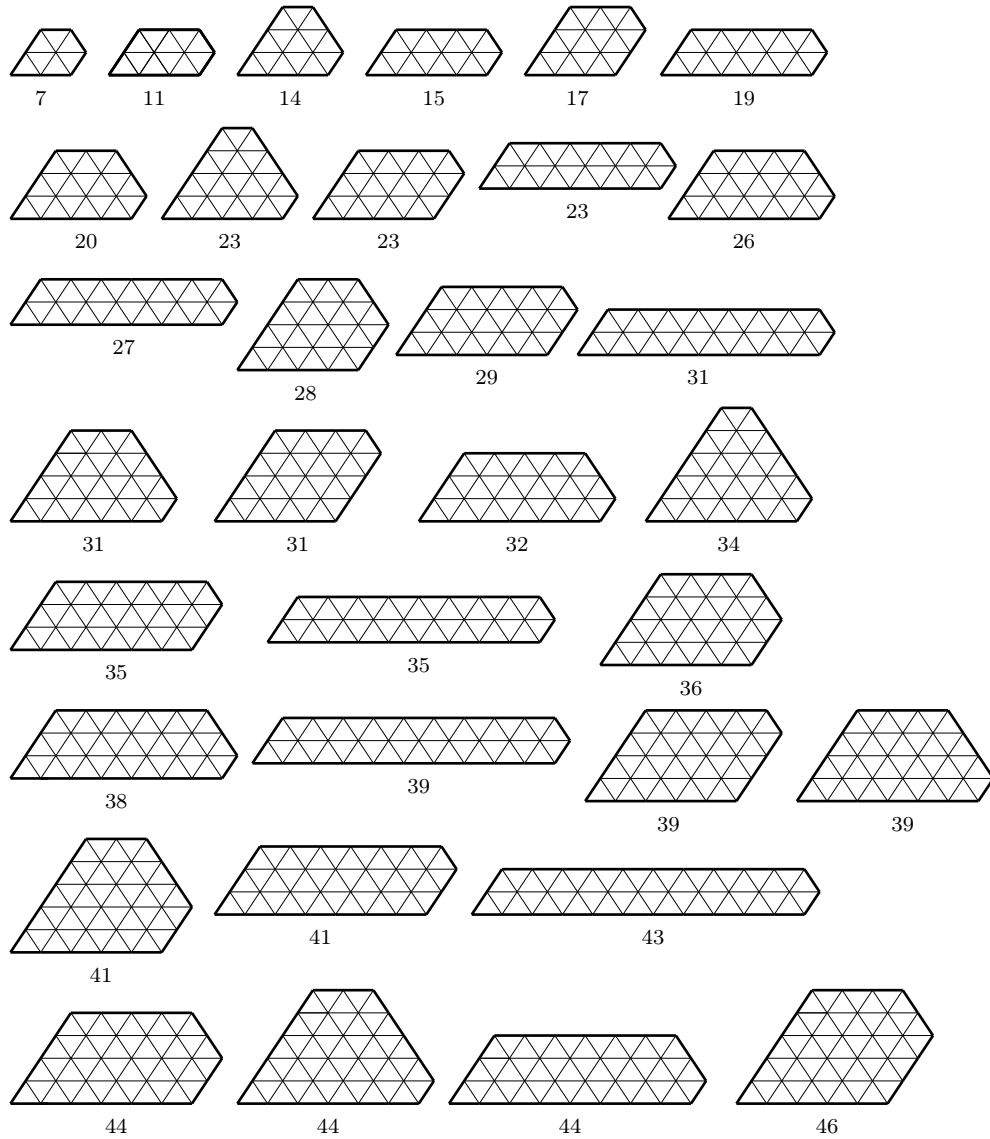
91 + 14m	a	b	c	d	r	s	98 + 14m	a	b	c	d	r	s
91	2	10	3	1	0	0	98	1	9	4	1	0	0
105	2	9	4	1	1	0	112	2	10	3	2	1	0
119*	5	4	4	6	-	-	126*	5	5	3	7	-	-
301	10	5	8	7	2	1	308	14	4	9	6	2	1
133*	7	4	5	4	-	-	140*	8	4	4	6	-	-
315	15	3	10	6	3	1	322	13	5	8	7	3	1
147	3	7	6	2	4	0	154	5	5	8	1	4	0
161	6	5	8	1	5	0	168	6	7	6	2	5	0
175	8	4	9	1	6	0	182	5	7	6	3	6	0
189	6	7	6	3	7	0	196	8	4	9	2	7	0
203	7	11	2	6	8	0	210	5	8	5	5	8	0
217	8	9	4	5	9	0	224	8	10	3	6	9	0
231	8	8	5	5	10	0	238	7	6	7	5	10	0
245	7	8	5	6	11	0	252	8	11	2	8	11	0
259	10	6	7	5	12	0	266	7	7	6	7	12	0

Tabelle 2.1: Realisierung $k = 91 + 14m$

Tabelle 2.2: Realisierung $k = 98 + 14m$

In den Ausnahmefällen $k = 119, 133$ in Tabelle 2.1, in denen die Formel (2.1) erst ab $s = 1$ gilt, sind Ersatzwerte 119^* und 133^* angegeben mit $\delta_{bc} \neq 13$ analog in Tabelle 2.2. Die geometrischen Realisierungen der Werte in Tabelle 2.1 sind in Abb. 9 im Anhang angegeben. Damit ist gezeigt, dass mit $k = 85 + m \cdot 14$ ($m \in \mathbb{N}$) alle $k \geq 85$ in \mathfrak{J}_6 liegen, und der Satz ist bewiesen.

5 Anhang

Abbildung 6: Alle k -Pflasterungen des Fünfecks mit $k \leq 46$

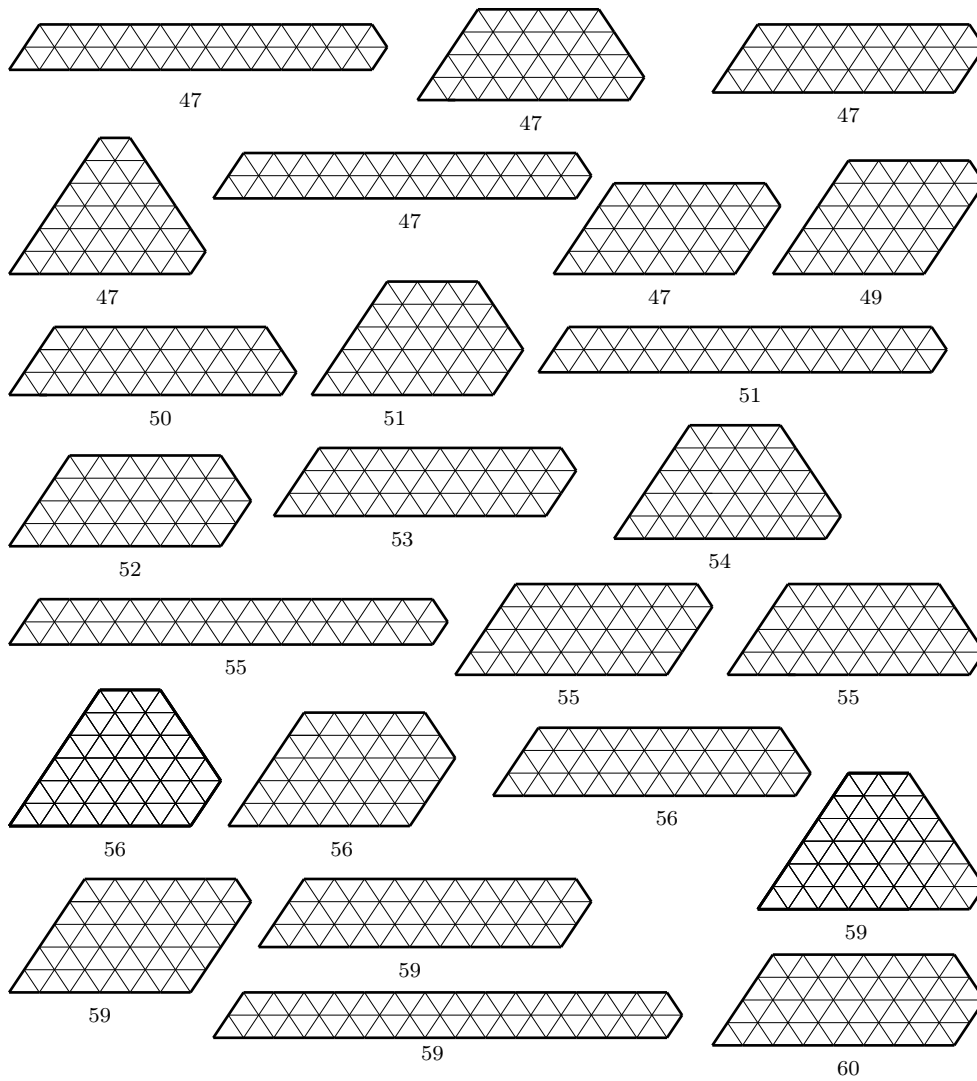


Abbildung 7: Alle k -Pflasterungen des Fünfecks mit $46 < k \leq 60$

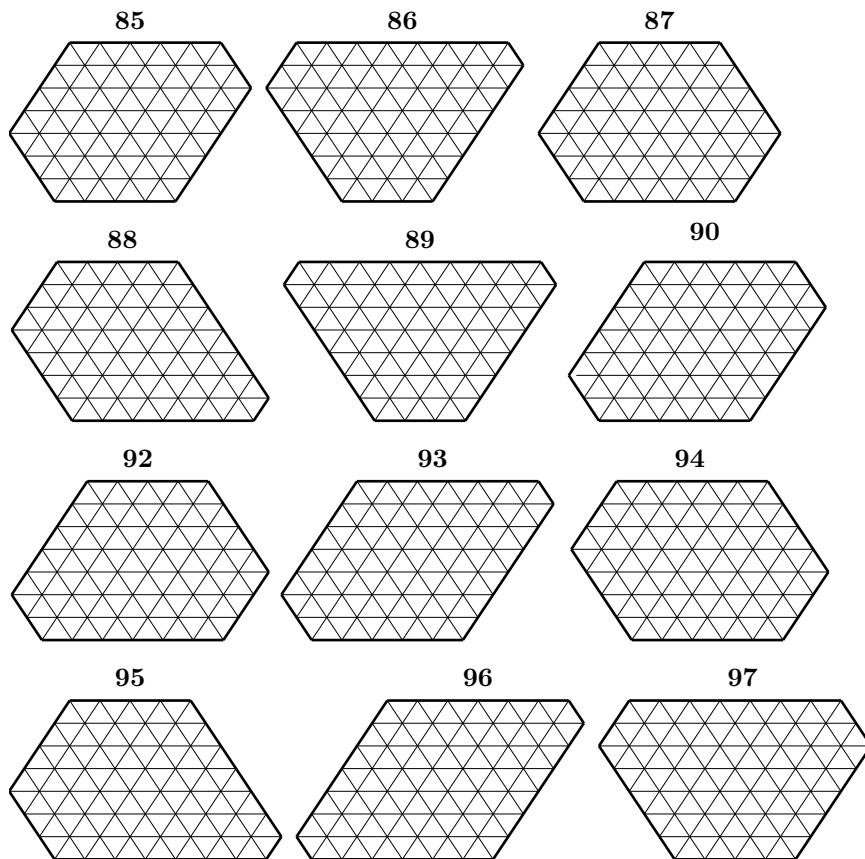


Abbildung 8: k -Pflasterungen von Sechsecken mit $\delta = 7$, $85 \leq k \leq 97$

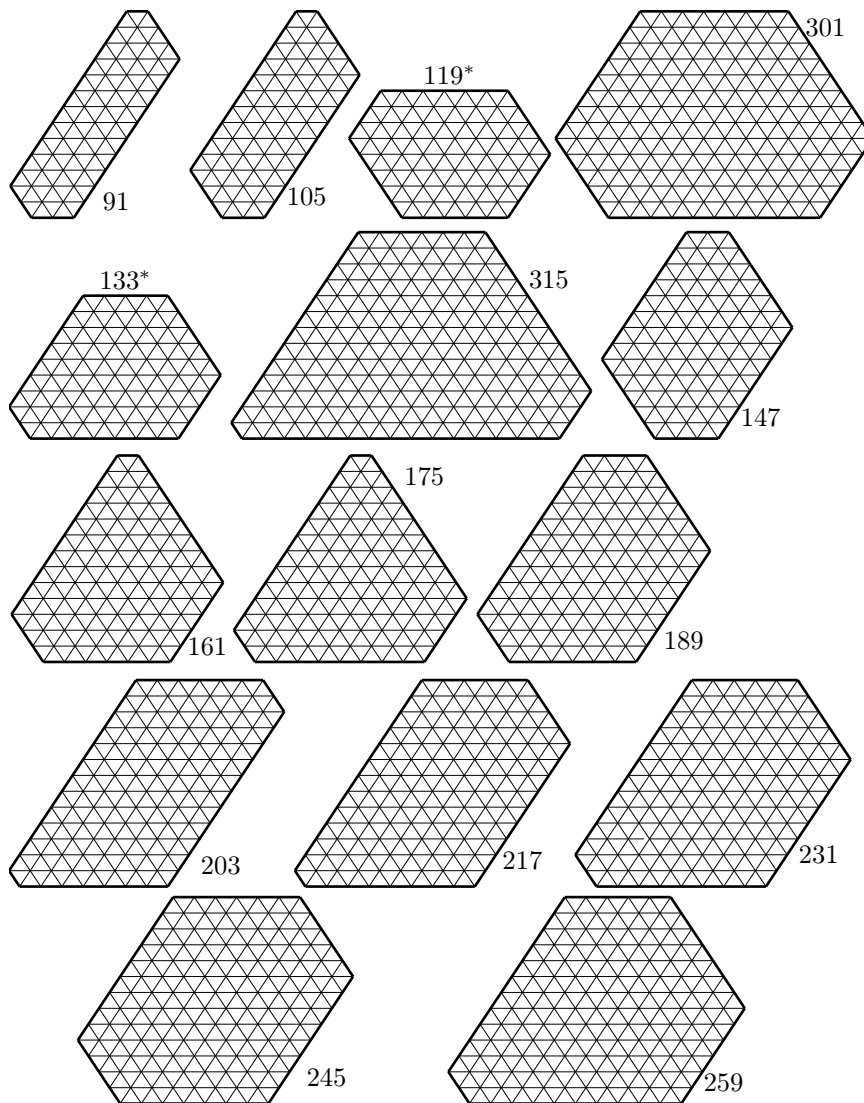


Abbildung 9: Realisierung $k = 91 + 14m$

Alle regulären k -Pflasterungen von Sechsecken mit $0 < k < 75$

k	a	b	c	d	k	a	b	c	d	k	a	b	c	d
6	1	1	1	1	43	1	2	6	2	62	2	5	3	2
10	1	1	2	1	45	1	4	3	2	62	1	3	6	3
13	1	2	1	2	46	1	3	4	3	62	1	3	7	1
14	1	1	3	1	46	1	3	5	1	62	1	5	3	3
16	1	2	2	1	46	1	2	7	1	62	1	1	15	1
18	1	1	4	1	46	1	5	1	5	63	1	4	4	4
19	1	2	2	2	46	1	1	11	1	64	2	2	7	2
22	1	2	3	1	47	2	4	2	3	64	2	4	3	4
22	1	3	1	3	48	2	2	5	2	64	2	4	4	2
22	1	1	5	1	48	1	4	4	1	64	1	2	10	1
24	2	2	2	2	49	1	2	7	2	65	1	4	5	2
25	1	2	3	2	50	1	4	3	3	66	3	3	4	3
26	1	1	6	1	50	1	1	12	1	66	1	1	16	1
27	1	3	2	2	51	1	3	5	2	67	1	3	7	2
28	1	2	4	1	52	2	4	3	2	67	2	3	5	3
30	1	3	2	3	52	2	4	2	4	67	1	5	4	2
30	1	3	3	1	52	1	2	8	1	67	1	5	3	4
30	1	1	7	1	53	1	4	3	4	67	1	2	10	2
31	1	2	4	2	54	3	3	3	3	68	1	4	6	1
32	2	2	3	2	54	1	3	5	3	69	2	5	2	5
33	1	4	1	4	54	1	3	6	3	70	1	3	7	3
34	1	2	5	1	54	1	1	13	1	70	1	3	8	1
34	1	1	8	1	55	1	4	4	2	70	1	4	5	3
35	1	3	3	2	55	1	5	2	4	70	1	2	11	1
37	2	3	2	3	55	1	2	8	2	70	1	5	3	5
37	1	2	5	2	56	2	2	6	2	70	1	5	5	1
38	1	3	4	1	57	2	5	2	3	70	1	1	17	1
38	1	3	3	3	58	1	6	1	6	71	2	4	4	3
38	1	1	9	1	58	1	4	5	1	72	2	2	8	2
40	2	2	4	2	58	1	2	9	1	72	2	3	6	2
40	1	4	2	3	58	1	1	14	1	72	1	6	2	5
40	1	2	6	2	59	1	3	6	2	73	3	4	3	4
42	2	3	3	2	59	2	4	3	3	73	1	2	11	2
42	1	1	10	1	60	1	4	4	3	73	1	4	5	4
43	1	3	4	2	61	1	2	9	2	74	1	5	4	3
43	1	4	2	4	61	1	6	1	6	74	1	1	18	1

Alle regulären k -Pflasterungen von Sechsecken mit $75 \leq k < 85$

k	a	b	c	d	k	a	b	c	d	k	a	b	c	d
75	1	3	8	2	78	2	5	3	4	81	1	6	3	4
75	1	4	6	2	78	1	4	7	1	82	2	3	7	2
75	1	6	2	6	78	1	7	1	7	82	1	2	13	1
76	2	4	5	2	78	1	1	19	1	82	1	5	4	5
76	2	4	4	4	79	1	5	4	4	82	1	5	6	1
76	1	2	12	1	79	1	5	5	2	82	1	1	20	1
77	2	3	6	3	79	1	2	12	2	83	1	3	9	2
78	1	3	8	3	80	2	2	9	2	83	2	4	5	3
78	1	3	9	1	80	3	4	4	3	83	2	5	3	5
78	3	3	5	3	80	1	4	6	3	83	1	4	6	4

Tabelle 3: Alle regulären k -Pflasterungen von Sechsecken mit $0 < k < 85$

Literatur

- [B-S] Blind, R.; Shephard, G.C.: *Finite edge-to-edge tilings by convex polygons*. Mathematika **48** (2001), no. 1-2, 25-50.
- [K-S] Kasimatis, E. A.; Stein, S. K.: *Equidissection of polygons*. Discrete Math. **85** (1990), no. 3, 281-294.
- [La1] Laczkovich, M.: *Tilings of polygons with similar triangles*. Combinatorica **10** (1990), no.3, 281-306.
- [La2] Laczkovich, M.: *Tilings of Convex Polygons with Congruent Triangles*. Discrete Coput. Geom. **48** (2012), 330-372.
- [Yu] Yuan, L.: *Acute triangulation of polygons*. Discrete Coput. Geom. **34** (2005), 697-706.