VERALLGEMEINERTE HADWIGER-HILL SIMPLEXE

Eike Hertel

Friedrich-Schiller-Universität Jena, Mathematisches Institut,
Ernst-Abbe-Platz 1–2, D–07743 Jena, Germany
e-mail: hertel@minet.uni-jena.de

Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik 04/03

Abstract

We characterize a new class of d-dimensional polytopes which are self-similar, admit tilings of $\mathbb{R}^d$ and are consequently rectifiable, i. e., equivalent by dissection to a d-cube. These polytopes are generalizations of the Hadwiger-Hill simplexes.

1 Einleitung

Das Ziel dieser Note ist die Beschreibung einer Klasse d-dimensionaler Polyeder, die selbstähnlich sind und folglich eine Auspflasterung (Parkettierung) des $\mathbb{R}^d$ gestatten und die rektifizierbar (mit einem Würfel zerlegungsgleich) sind. Dazu werden zunächst einige Grundbegriffe der Polydergeometrie zusammengestellt (vgl. [Ha2]).

Ein konvexes d-dimensionales Polyeder $P \in \mathfrak{P}_d$ (*d-Polytop*) ist die konvexe Hülle seiner d-dimensionalen Eckpunktmenge $\text{vert}P = \{x_1, ..., x_n\}$ mit $n \geq d+1$:

$$\begin{aligned} P &= \text{conv}\{x_1, ..., x_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \wedge \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ (i = 1, ..., n)\}. \end{aligned}$$

P heißt *zerlegt* in die Teilpolytope A, B, wenn P die innendisjunkte Vereinigung von A und B ist:

$$P = A + B \quad :\Longleftrightarrow \quad P = A \cup B \quad \wedge \quad \text{int}(A \cap B) = \emptyset.$$

Außerdem wird im folgenden die *Minkowskisumme*

$$A \times B := \{x \in \mathbb{R}^d : x = a + b \quad \wedge \quad a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$$

von beliebigen (auch niederdimensionalen) Polytopen A, B beansprucht mit den Eigenschaften der Assoziativität, Kommutativität, der Distributivität

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \tag{1}$$

und der Eigenschaft

$$\lambda(A \times B) = \lambda A \times \lambda B \tag{2}$$

für die *Dilatation* $\lambda X := \{\lambda x : x \in X\}$ von X mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\lambda > 0$ (vgl. [Ha2], S. 13 ff.).

Grundlage der zu konstruierenden Polytopklasse bilden die *d-Simplexe* $S \in \mathfrak{P}_d$, die man wie jedes Polytop als konvexe Hülle ihrer $d+1$ *Ecken* $p_0, ..., p_d$ beschreiben kann durch

$$\begin{aligned} S &= (p_0 p_1 \cdots p_d) \\ &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i p_i \quad \wedge \quad \sum_{0}^{d} \lambda_i = 1 \quad \wedge \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \; (i = 1, ..., d) \right\} \end{aligned}$$

oder mit den d erzeugenden *Kantenvektoren* $a_i := p_i - p_{i-1}$ $(i = 1, ..., d)$ durch

$$\begin{aligned} S &= \langle p_0; a_1, ..., a_d \rangle \\ &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = p_0 + \sum_{i=1}^{d} \mu_i a_i \quad \wedge \quad 1 \geq \mu_1 \geq ... \geq \mu_d \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ferner werden d-dimensionale *Parallelotope* $P \in \mathfrak{P}_d$ mit ausgezeichneter Ecke p_0 und erzeugenden Kantenvektoren a_i betrachtet

$$\begin{aligned} P &= [p_0; a_1, ..., a_d] \\ &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = p_0 + \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i \quad \wedge \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \; (i = 1, ..., d) \right\}, \end{aligned}$$

die sich als Minkowskisumme ihrer von den Vektoren a_i erzeugten Kanten (1-Simplexen) darstellen lassen

$$P = \langle p_0; a_1 \rangle \times \langle \Theta; a_2 \rangle \times ... \times \langle \Theta; a_d \rangle.$$

Sind die Kantenvektoren a_i paarweise orthogonal und gleich lang, so ist P ein *d-Würfel*.

Zwei d-Polytope heißen *zerlegungsgleich*, wenn sie Summen endlich vieler paarweise kongruenter Teilpolytope sind:

$$A \stackrel{z}{=} B \quad :\Longleftrightarrow \quad A = \sum_{1}^{n} A_i \quad \wedge \quad B = \sum_{1}^{n} B_i \quad \wedge \quad A_i \cong B_i \; (i = 1, ..., n).$$

Die in dieser Note interessierenden Eigenschaften konvexer Polyeder sollen nun explizit definiert werden.

Definition 1. Ein Polytop $P \in \mathfrak{P}_d$ heiße *rektifizierbar*, wenn es mit einem Würfel zerlegungsgleich ist.

Definition 2. Ein Polytop $P \in \mathfrak{P}_d$ heiße *Pflasterpolytop*, wenn der $\mathbb{R}^d$ eine Parkettierung in zu P kongruente Polytope gestattet

$$\mathbb{R}^d = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu \quad \wedge \quad P_\nu \cong P \; (\nu = 1, 2, ...).$$

Definition 3. Ein Polytop $P \in \mathfrak{P}_d$ heißt *k-selbstähnlich*, wenn es in $k \geq 2$ zu P ähnliche Teilpolytope zerlegt werden kann:

$$P = \sum_{\nu=1}^{k} P_\nu \quad \wedge \quad P_\nu \simeq P \; (\nu = 1, ..., k).$$

Sind die Teile P_ν außerdem paarweise kongruent

$$P_\nu \cong P_1 \; (\nu = 2, ..., k),$$

so heiße P genauer *k-replizierend*.

Während in der Dimension $d = 1$ jedes Polytop (Strecke) k-replizierend ist für alle $k \geq 2$ und für $d = 2$ die replizierenden Dreiecke und Vierecke im wesentlichen bekannt sind, ist die Frage nach nicht trivialen selbstähnlichen d-Polytopen für $d > 2$ bislang offen. Eine erste allgemeine Klasse von selbstähnlichen Polytopen für alle Dimensionen wird nun eingeführt durch folgende

Definition 4. a) Ein System $\{a_1, ..., a_d\}$ von $d > 1$ gleich langen isogonalen Vektoren des $\mathbb{R}^d$ heiße *H-System*, d. h., es existieren reelle Zahlen γ und ω mit

$$\gamma > 0, \quad \frac{1}{1-d} < \omega < 1 \quad \text{und} \quad a_i a_k = \begin{cases} \gamma^2 \omega & (i \neq k) \\ \gamma^2 & (i = k), \end{cases}$$

also $|a_i| \equiv \gamma$ $(i = 1, ..., d)$ und $\omega \equiv \cos(\sphericalangle(a_i.a_k))$ für $1 \leq i < k \leq d$.
b) Sind $\overline{S}_i := \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \subseteq \overline{E}_i$ und $\overline{\overline{S}}_{d-i} := \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_d \rangle \subseteq \overline{\overline{E}}_{d-i}$ niederdimensionale Simplexe in zueinander komplementären Teilräumen $\overline{E}_i$ und $\overline{\overline{E}}_{d-i}$ des $\mathbb{R}^d$, so heißt jedes zu

$$\begin{aligned} W_i^d &:= \overline{S}_i \times \overline{\overline{S}}_{d-i} \\ &= \Big\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{\nu=1}^{d} \alpha_\nu a_\nu \wedge 1 \geq \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_i \geq 0 \wedge 1 \geq \alpha_{i+1} \geq ... \geq \alpha_d \geq 0 \Big\} \end{aligned}$$

kongruente d-Polytop $P \cong W_i^d$ *Simplotop vom Typ* i (vgl. [Ha2], S. 17 ff.).
Bilden die erzeugenden Kantenvektoren a_i ein H-System, so heiße P genauer *d-dimensionales H-Simplotop.*

Für $d = 4$ sei "das normierte" H-System als Beispiel angegeben:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0) \\
a_2 &= (\omega, \ \sqrt{1-\omega^2}, \quad 0, \quad 0) \\
a_3 &= (\omega, \ \omega\sqrt{\tfrac{1-\omega}{1+\omega}}, \ \sqrt{2\omega+1}\sqrt{\tfrac{1-\omega}{1+\omega}}, \quad 0) \\
a_4 &= (\omega, \ \omega\sqrt{\tfrac{1-\omega}{1+\omega}}, \ \tfrac{\omega}{\sqrt{2\omega+1}}\sqrt{\tfrac{1-\omega}{1+\omega}}, \ \sqrt{\tfrac{1+2\omega-3\omega^2}{2\omega+1}}),
\end{aligned}$$

woraus zu erkennen ist, daß die Einschränkung

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{1-d} < \omega = \cos(\sphericalangle(a_i, a_k))$$

gelten muß, da die Vektoren a_i sonst ($\omega = \frac{1}{1-d}$) linear abhängig sind.
Abb. 1 zeigt die Projektionen des 3-dimensionalen Simplotops W_2^3 und des 4-dimensionalen Simplotops W_2^4.

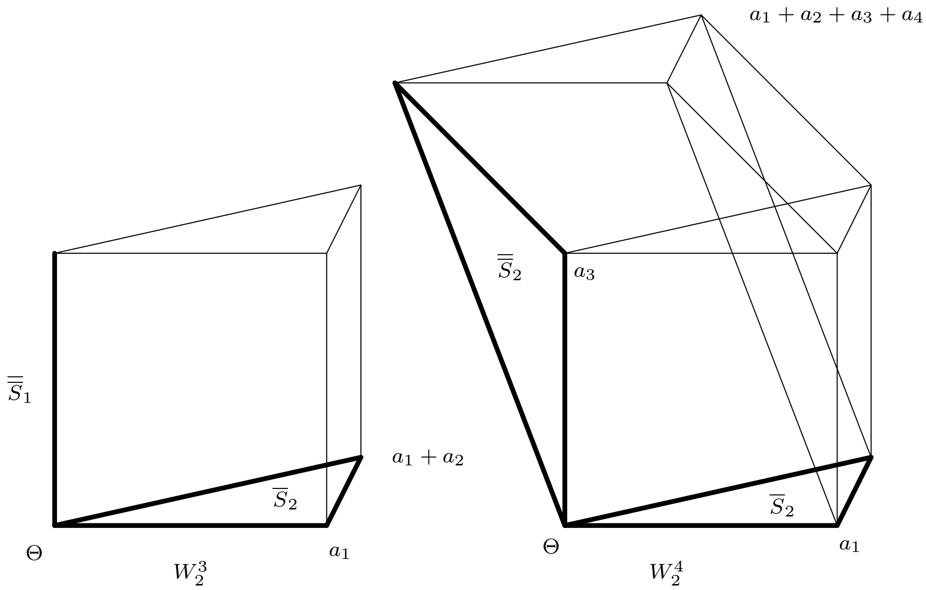

Abbildung 1: H-Simplotope

Mit der Vereinbarung

$$\overline{S}_0 = \overline{\overline{S}}_0 := \{\Theta\} \quad \text{und} \quad \overline{S}_d = \overline{\overline{S}}_d := \langle \Theta; a_1, ..., a_d \rangle$$

ergeben sich $[\frac{d}{2}]+1$ topologisch verschiedene Simplotoptypen im $\mathbb{R}^d$, unter denen die d-Simplexe W_0^d, W_d^d und die Prismen W_1^d, W_{d-1}^d mit simplizialer Basis als Spezielfälle vorkommen. Insofern sind die hier eingeführten H-Simplotope W_i^d vom Typ i Verallgemeinerungen der von Hill [Hi] bereits im Jahre 1896 für $d=3$ eingeführten "H-Simplexe" W_0^3, die durch Hadwiger [Ha1] für $d>3$ als "Hillsche Hypertetraeder" W_0^d verallgemeinert wurden.

2 Grundeigenschaften der H-Simplotope

Im folgenden werden einige interessante Grundeigenschaften von H-Simplotopen zusammengestellt beginnend mit folgendem

Lemma 1. Jedes d-dimensionale H-Simplotop

$$W_i^d = \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \times \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_d \rangle$$

vom Typ i $(0 \le i \le d)$ ist kongruent zu dem Simplotop

$$W_i^d(\pi) := \langle \Theta; a_{\pi(1)}, ..., a_{\pi(i)} \rangle \times \langle \Theta; a_{\pi(i+1)}, ..., a_{\pi(d)} \rangle,$$

wenn $\pi \in \mathfrak{S}_d$ eine beliebige Permutation der Indexmenge $\{1, ..., d\}$ ist.

Beweis: Zur Abkürzung sei $\langle k_1, ..., k_d \rangle_i := \langle \Theta; a_{k_1}, ..., a_{k_i} \rangle \times \langle \Theta; a_{k_{i+1}}, ..., a_{k_d} \rangle$ gesetzt. Es genügt zu zeigen, daß zu jeder Transposition $(jk) \in \mathfrak{S}_d$ eine Bewegung $\beta_{jk} \in \mathfrak{B}_d$ existiert mit

$$\beta_{jk}\Big(\langle 1, \cdots, d \rangle_i\Big) = \langle 1, \cdots, (j-1), k, (j+1), \cdots, (k-1), j, (k+1), \cdots, d \rangle_i$$

für $j<k$. Das ist aber der Fall, wenn β_{jk} die Spiegelung an der Hyperebene ε durch Θ senkrecht zur Richtung $a_k - a_j$ ist; ε ist die affine Hülle der *Punktmenge*

$$\{\Theta, a_1, ..., a_d, a_j + a_k\} \setminus \{a_j, a_k\},$$

so daß Lemma 1 bewiesen ist.

Wir bemerken, daß Lemma 1, zumindest für $d>2$, wesentlich darauf beruht, daß die Vektoren a_i ein H-System bilden. Die Beweissituation wird besonders deutlich, wenn man berücksichtigt, daß die *Punkte* a_i ein reguläres sphärisches Simplex S^{d-1} auf der $(d-1)$-Sphäre im $\mathbb{R}^d$ bilden, für das die Hyperebene ε eine Symmetriehyperebene ist. S^{d-1} hat im übrigen für $|a_i| \equiv 1$ die Kantenlänge $\varphi = \arccos \omega$ und die Keilwinkelgröße (Größe der Diederwinkel) α, mit entweder $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\cos \alpha} = 2-d$ (vgl. [BöHe], Satz 2, S. 277).

Während Lemma 1 für $d>2$ nur für H-Simplotope richtig ist, gilt die folgende Aussage für *beliebige* Simplexe bzw. Simplotope.

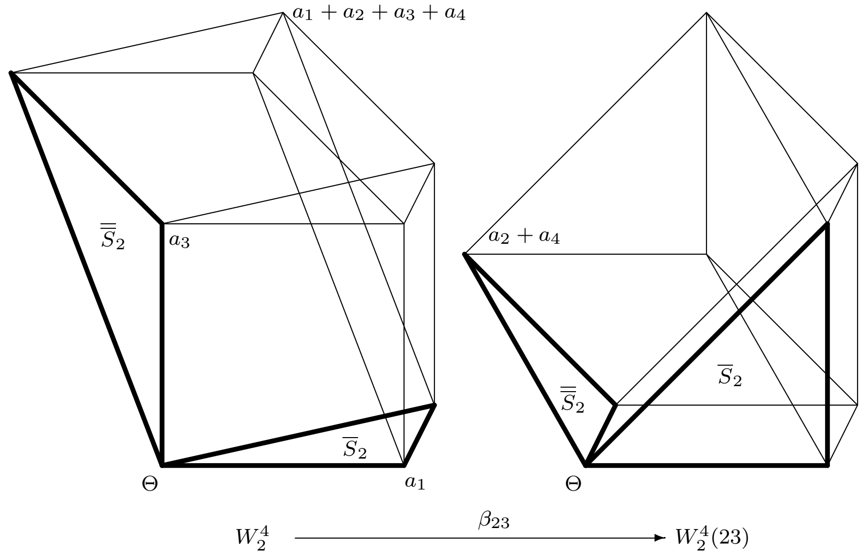

Abbildung 2: Kantenpermutation

Lemma 2. (*Kanonische Simplexzerlegung*) Jedes d-Simplex W_0^d kann in $d{+}1$ Simplotope $\overline{W}_i^d$ "kanonisch" zerlegt werden:

$$W_0^d = \langle \Theta; a_1, ..., a_d \rangle = \textstyle\sum_{i=0}^d \overline{W}_i^d \text{ mit}$$

$$\overline{W}_i^d := \langle \Theta; b_1, ..., b_i \rangle \times \langle \sum_{\nu=1}^{i} b_\nu \,;\, b_{i+1}, ..., b_d \rangle \quad \text{für} \quad b_i := \tfrac{1}{2} a_i \ (i = 1, ..., d),$$

$$\overline{W}_0^d := \langle \Theta; b_1, ..., b_d \rangle \quad \text{und} \quad \overline{W}_d^d := \langle \sum_{\nu=1}^{d} b_\nu \,;\, b_1, ..., b_d \rangle.$$

Diese Aussage ist ein Spezialfall (für $\lambda = \frac{1}{2}$) einer entsprechenden bei Hadwiger angegebenen Zerlegung ([Ha2], S. 18 ff.). Im Fall der Dimesnion $d = 3$ kommt diese Zerlegung bereits bei Euklid ([Eu], L.3, S43) vor.

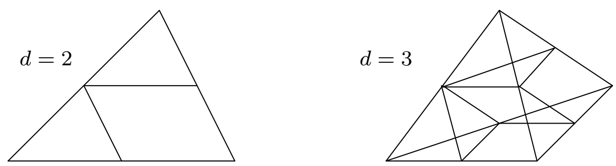

Abbildung 3: Kanonische Simplexzerlegung

Die Umkehrung, d. h. die Zerlegung eines Simplotops in (kongruente) Simplexe, gilt (für $d > 2$) wieder nur für H-Simplotope im Sinne von folgendem

Lemma 3. (*Kanonische Simplotopzerlegung*) Jedes d-dimensionale H-Simplotop

$W_i^d = \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \times \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_d \rangle$ vom Typ i $(0 \leq i \leq d)$

kann in $\binom{d}{i}$ zum Simplex $\langle \Theta; a_1, ..., a_d \rangle$ kongruente H-Simplexe "kanonisch" zerlegt werden.

Beweis: Wir betrachten nur den nicht trivialen Fall $0 < i < d$. Dann sind die beiden das H-Simplotop

$$\begin{aligned} W_i^d &= \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \times \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_d \rangle \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{\nu=1}^{d} \alpha_\nu a_\nu \wedge 1 \geq \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_i \geq 0 \wedge 1 \geq \alpha_{i+1} \geq ... \geq \alpha_d \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

definierenden Ungleichungen

(a) $1 \geq \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_i \geq 0$ und (b) $1 \geq \alpha_{i+1} \geq ... \geq \alpha_d \geq 0$

äquivalent zum System aller Ungleichungen

(c) $1 \geq \alpha_{\pi(1)} \geq ... \geq \alpha_{\pi(d)} \geq 0$

für solche Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_d$, bei denen die Größenbeziehungen (a) und (b) ungestört bleiben. Davon gibt es genau $\binom{d}{i}$, denn für die Verteilung der i Koeffizienten $\alpha_1, ..., \alpha_i$ (in dieser geordneten Reihenfolge!) auf die d Stellen in (c) gibt es genau $\binom{d}{i}$ Möglichkeiten. Mit der Vereinbarung

$$\langle k_1, \cdots, k_d \rangle := \langle \Theta; a_{k_1}, ..., a_{k_d} \rangle = \{ x : x = \sum_{\nu=1}^{d} \alpha_{k_\nu} a_{k_\nu} \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_{k_1} \geq ... \geq \alpha_{k_d} \geq 0 \}$$

wird also

$$\begin{aligned} (d) \qquad W_i^d = \langle 1, 2, \cdots, d \rangle &+ \langle 1, 2, \cdots, (i-1), (i+1), i, (i+2), \cdots, d \rangle \\ &... + \langle 1, 2, \cdots, (i-1), (i+1), \cdots, d, i \rangle + ...+ \\ &... + \langle (i+1), \cdots, d, 1, 2, \cdots, i \rangle. \end{aligned}$$

Für das 3-dimensionale H-Simplotop W_1^3 bzw. W_2^3 z. B. bedeutet das ausführlich

$$\begin{aligned} W_2^3 &= \langle \Theta; a_1, a_2 \rangle \times \langle \Theta; a_3 \rangle \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu a_\nu \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0 \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_3 \geq 0 \} \\ &= S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned}$$

mit den $\binom{3}{1} = 3$ Simplexen

$$S_1 = \langle \Theta; a_1, a_2, a_3 \rangle = \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu a_\nu \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \Big\},$$

$$S_2 = \langle \Theta; a_1, a_3, a_2 \rangle = \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu a_\nu \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_3 \geq \alpha_2 \Big\},$$

$$S_3 = \langle \Theta; a_3, a_1, a_2 \rangle = \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu a_\nu \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_3 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \Big\}.$$

Das ist die schon bei Euklid vorkommende kanonische Zerlegung eines beliebigen (!) dreiseitigen Prismas in drei inhaltsgleiche (i. a. nicht kongruente !) Teilsimplexe ([Eu], L. 7, S. 49). Die in der Summe (d) durch Permutation der erzeugenden Kantenvektoren aus dem Simplex $\langle 1, \cdots, d \rangle = \langle \Theta; a_1, ..., a_d \rangle$ hervorgegangenen Simplexe $\langle k_1, \cdots, k_d \rangle$ haben wegen der unterschiedlichen Koeffizientenbedingungen $1 \geq \alpha_{k_1} \geq ... \geq \alpha_{k_d} \geq 0$ paarweise keine inneren Punkte gemeinsam, erfüllen andererseits aber das ganze Simplotop W_i^d und sind nach Lemma 1 alle kongruent zu $\langle 1, \cdots, d \rangle$, was zu beweisen war.

Noch bemerkenswerter ist eine Eigenschaft von H-Simplotopen, die formuliert wird in folgendem

Lemma 4. Jedes d-dimensionale H-Simplotop

$$W_i^d = \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \times \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_d \rangle \text{ vom Typ } i \; (0 \leq i \leq d)$$

läßt sich durch $(d-i)!\, i! - 1$ zu W_i^d kongruente Simplotope zu einem *H-Parallelotop* P ergänzen:

$$P = [\Theta; a_1, ..., a_d] = \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_i \\ \sigma \in \mathfrak{S}_{d-i}}} W_i^d(\pi, \sigma).$$

Beweis: Es sei

$$\begin{aligned} W_i^d(\pi, \sigma) &:= \langle \Theta; a_{\pi(1)}, ..., a_{\pi(i)} \rangle \times \langle \Theta; a_{\sigma(i+1)}, ..., a_{\sigma(d)} \rangle \\ &= \Big\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{\nu=1}^{i} \alpha_{\pi(\nu)} a_{\pi(\nu)} + \sum_{\nu=i+1}^{d} \alpha_{\sigma(\nu)} a_{\sigma(\nu)} \\ &\qquad \wedge \quad 1 \geq \alpha_{\pi(1)} \geq ... \geq \alpha_{\pi(i)} \geq 0 \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_{\sigma(i+1)} \geq ... \geq \alpha_{\sigma(d)} \geq 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Dann haben diese Simplotope keine inneren Punkte gemeinsam, denn wenn etwa gilt

$$x \in \mathrm{int}\Big(W_i^d(\pi_0, \sigma_0) \cap W_i^d((12), \sigma_0) \Big)$$

mit π_0, σ_0 als identische Permutationen, dann wäre

$$1 > \alpha_1 > ... > \alpha_i > 0 \quad \wedge \quad 1 > \alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_3 > ... > \alpha_i > 0,$$

also $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_1$, was unmöglich ist. Andererseits ergibt sich

$$\sum W_i^d(\pi,\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{\nu=1}^{d} \alpha_\nu a_\nu \quad \wedge \quad 1 \geq \alpha_\nu \geq 0\} = [\Theta; a_1, ..., a_d] = P,$$

wobei $\pi \in \mathfrak{S}_i$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_{d-i}$ unabhängig voneinander alle möglichen Permutationen durchlaufen, so daß insgesamt $(d-i)!\,i!$ Summanden entstehen, und schließlich sind die Teilsimplotope $W_i^d(\pi,\sigma)$ nach Lemma 1 paarweise kongruent, womit Lemma 4 bewiesen ist.

3 Haupteigenschaften der H-Simplotope

Nun können die in der Einleitung angekündigten Haupteigenschaften der H-Simplotope zusammengestellt werden. Zunächst ergibt sich als eine unmittelbare Folgerung aus dem Lemma 4 folgender

Satz 1. Jedes d-dimensionale H-Simplotop vom Typ i $(0 \leq i \leq d)$ ist ein Pflasterpolytop (vgl. Def. 2).

Dieser Satz verallgemeinert eine Aussage von Debrunner für Hadwiger-Hill Simplexe, die H-Simplotope vom Typ 0 bzw. d sind ([De], Theorem I, S. 238).
Berücksichtigt man, daß jedes Parallelotop mit einem inhaltsgleichen Würfel zerlegungsgleich ist und daß ein Polytop, für welches die Summe von n kongruenten Exemplaren mit einem Würfel zerlegungsgleich ist, selbst mit einem Würfel zerlegungsgleich sein muß, so folgt aus Lemma 4 ferner sofort folgender

Satz 2. Jedes d-dimensionale H-Simplotop W_i^d vom Typ i $(0 \leq i \leq d)$ ist rektifizierbar (vgl. Def. 1).

Als letzte bemerkenswerte Eigenschaft von H-Simplotopen werde ihre Selbstähnlichkeit bewiesen. Es gilt folgender

Satz 3. Jedes d-dimensionale H-Simplotop vom Typ i $(0 \leq i \leq d)$ ist für alle natürlichen Zahlen $m \geq 2$ stets m^d-replizierend (vgl. Def. 3).

Beweis: O. B. d. A. beweisen wir hier die Aussage nur für $m = 2$ - die Übertragung auf beliebige $m > 2$ liegt auf der Hand (man setze $b_i := \frac{1}{m} a_i$).

(a) Zunächst sei $W_0^d = \langle \Theta; a_1, ..., a_d \rangle$ ein d-dimensionales H-Simplotop vom Typ 0, also ein H-Simplex (Hadwiger-Hill Simplex). Dann läßt sich W_0^d nach Lemma 2 kanonisch in $d+1$ H-Simplotope $\overline{W}_i^d$ zerlegen mit

$\overline{W}_i^d = \langle \Theta; b_1, ..., b_i \rangle \times \langle \sum_{\nu=1}^{i} b_\nu; b_{i+1}, ..., b_d \rangle$ für $b_i := \frac{1}{2} a_i$ $(i = 0, ..., d)$.

Jedes dieser Simplotope kann nach Lemma 3 in jeweils $\binom{d}{i}$ zum Simplex $\frac{1}{2} W_0^d = \langle \Theta; b_1, ..., b_d \rangle$ kongruente H-Simplexe kanonisch zerlegt werden. Insgesamt ist W_0^d damit in $\sum \binom{d}{i} = 2^d$ paarweise kongruente zu W_0^d ähnliche Simplexe zerlegt – W_0^d ist 2^d-replizierend. Für Hillsche Tetraeder ($d = 3$) ergibt sich z. B.

$$\begin{aligned}
W_0^3 &= \langle \Theta; a_1, a_2, a_3 \rangle \\
&= \langle \Theta; b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle b_1; b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle b_1; b_2, b_1, b_3 \rangle + \langle b_1; b_2, b_3, b_1 \rangle + \\
&\quad + \langle b_1 + b_2; b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle b_1 + b_2; b_1, b_3, b_2 \rangle + \langle b_1 + b_2; b_3, b_1, b_2 \rangle + \\
&\quad + \langle b_1 + b_2 + b_3; b_1, b_2, b_3 \rangle
\end{aligned}$$

(vgl. Abb. 4), was für $d = 3$ bereits früher vom Autor bewiesen wurde [He].

(b) Für H-Simplotope

$$W_i^d = \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \times \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_d \rangle \quad \text{mit} \quad 0 < i < d$$

erfolgt der Beweis durch vollständige Induktion nach der Dimension d. Für $d = 1$ ist die Aussage trivial, für $d = 2$ gilt sie sogar für beliebige Parallelogramme. Satz 3 sei richtig für alle Dimensionen d mit $2 \leq d \leq n$ und Typen $0 < i < d$. Nun sei

$$W_i^{n+1} = \langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle \times \langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_{n+1} \rangle$$

ein $(n+1)$-dimesnionales H-Simplotop vom Typ i mit $0 < i < n+1$. Dann gilt für die beiden niederdimensionalen Simplexe nach (a)

$$\begin{aligned}
\langle \Theta; a_1, ..., a_i \rangle &= \sum_{\nu=1}^{2^i} W_0^i(\nu) \quad \text{mit} \quad W_0^i(\nu) \cong \langle \Theta; b_1, ..., b_i \rangle, \\
\langle \Theta; a_{i+1}, ..., a_{n+1} \rangle &= \sum_{\mu=1}^{2^{n+1-i}} \overline{W}_0^{n+1-i}(\mu) \quad \text{mit} \quad \overline{W}_0^{n+1-i}(\mu) \cong \langle \Theta; b_{i+1}, ..., b_{n+1} \rangle.
\end{aligned}$$

Damit wird unter Berücksichtigung der Distributivität (1)

$$\begin{aligned}
W_i^{n+1} &= \Big(\sum_{\nu=1}^{2^i} W_0^i(\nu) \Big) \times \Big(\sum_{\mu=1}^{2^{n+1-i}} \overline{W}_0^{n+1-i}(\mu) \Big) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2^i} \sum_{\mu=1}^{2^{n+1-i}} \Big(W_0^i(\nu) \times \overline{W}_0^{n+1-i}(\mu) \Big) = \sum_{\nu=1}^{2^{n+1}} W_i^{n+1}(\nu)
\end{aligned}$$

mit

$$W_i^{n+1}(\nu) \cong \langle \Theta; b_1, ..., b_i \rangle \times \langle \Theta; b_{i+1}, ..., b_{n+1} \rangle = \tfrac{1}{2} W_i^{n+1} \simeq W_i^{n+1}$$

für $\nu = 1, ..., 2^{n+1}$, was zu beweisen war.

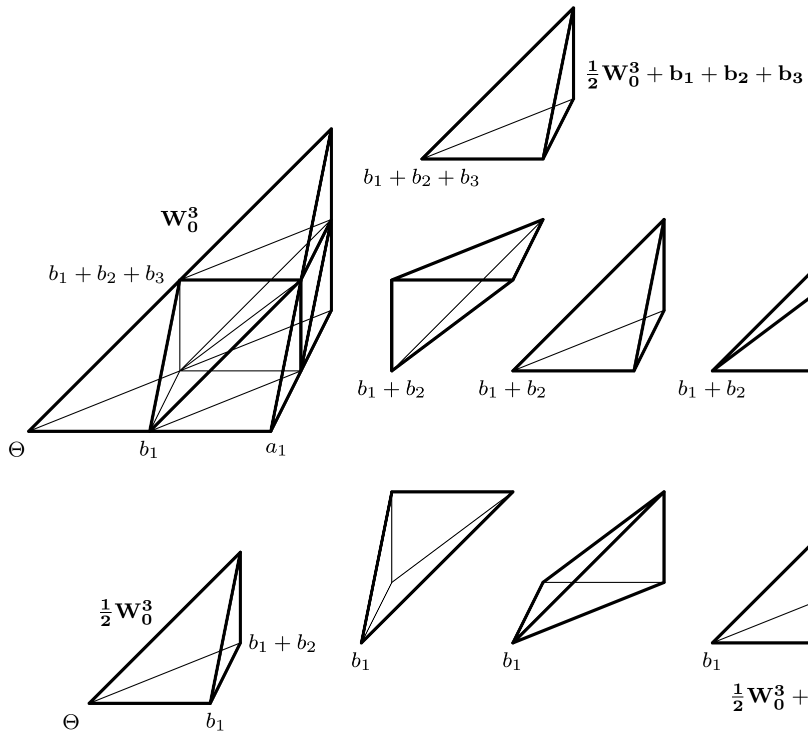

Abbildung 4: 2^3-replizierendes H-Simplotop W_0^3

Abbildung 4 zeigt die Weiterführung der kanonischen Simplexzerlegung (vgl. Abb. 3) des dreidimensionalen Hillschen Tetraeders $W_0^3 = \langle \Theta; a_1, a_2, a_3 \rangle$ zu einer Zerlegung von W_0^3 in $2^3 = 8$ zu $\frac{1}{2} W_0^3 = \langle \Theta; b_1, b_2, b_3 \rangle$ kongruente Teilsimplexe, die alle zum Ausgangssimplex W_0^3 ähnlich sind mit demselben Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$, und folglich ist W_0^3 8-replizierend.

Literatur

[BöHe] Böhm, J.; Hertel, E.: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*. Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart 1981.

[De] Debrunner, H. E.: *Tiling Euclidean d-Space with Congruent Simplexes.* In: Goodman, J. E. et al: *Discrete Geometry and Convexity.* Annals NY Acad. Sci., vol. 440, New York 1985.

[Eu] Euklid: *Die Elemente von Euklid*. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, V. Teil (Buch XI - XIII), Leipzig 1937.

[Ha1] Hadwiger, H.: *Hillsche Hypertetraeder*. Gaz. Mat., Lisboa 12, no. 50 (1951), 47-48.

[Ha2] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin 1957.

[He] Hertel, E.: *Self-similar Simplices*. Beitr. Algebra Geom. **41** (2000), 589-595.

[Hi] Hill, M. J. M.: *Determination of the Volumes of certain Species of Tetrahedra*. Proc. London Math. Soc. 27 (1896), 39-53.