Geometrie für Lehrer

Vorlesung im Wintersemester 01/02

Dr.W.Börner
Mathematisches Institut der FSU Jena

1 Axiomatische Grundlagen der Geometrie

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, der vom Schulunterricht her bekannten euklidischen Geometrie eine axiomatische Grundlage zu geben. Die wichtigsten sind durch folgende Begriffsbildungen gegeben:

- Inzidenzstrukturen mit Anordnung und Beweglichkeit,
- Normierte lineare Räume, insbesondere Vektorraum mit Skalarprodukt,
- Metrische Räume,
- Gruppen, die von involutorischen Elementen (Spiegelungen) erzeugt werden.

Historisch wurde zuerst der erstgenannte Weg beschritten: Euklid um 300 v.Chr., Hilbert um 1900, der für die Geometrie erstmals ein Axiomensystem formulierte, das den heute üblichen Forderungen nach mathematischer Strenge genügt.
Die an zweiter und dritter Stelle genannten Wege wurden im 19./20. Jahrhundert entwickelt. Für den modernen Mathematiker ist die elementare euklidische Geometrie einfach durch einen zwei-, drei- oder mehrdimensionalen reellen euklidischen Vektorraum gegeben. Der Begriff des metrischen Raumes gestattet weitgehende Verallgemeinerungen, sie wurden insbesondere durch die Differentialgeometrie nahegelegt (Gauss und weitere).
Die Charakterisierung einer euklidischen Ebene (und auch nichteuklidischer Ebenen und Räume) als Gruppe wurde um die Mitte des 20. Jahrhunderts vorgenommen (Bachmann u.a.)
Im Zusammenhang mit der Untersuchung spezieller Axiomensysteme für die Geometrie entstand eine Fülle von geometrischen Systemen, die in bestimmten Einzelheiten von der euklidischen Geometrie abweichen.

Literatur:
D e g e n, W. und P r o f k e, L.: Grundlagen der affinen und euklidischen Geometrie, Stuttgart 1976
H i l b e r t, D.: Grundlagen der Geometrie, 11.Aufl.Stuttgart 1972
L e n z, H.: Grundlagen der Elementarmathematik, 2.Aufl.Berlin 1967
B ö h m, J. u. a.: Geometrie I. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie (= Band 6 der Reihe „Mathematik für Lehrer“), 4.Aufl.Berlin 1985

1.1 Affine Inzidenzgeometrie der Ebene

1.1.1 Punkte, Geraden, Parallelität

Eine *affine Inzidenzebene* besteht aus einer Menge $\mathcal{P}$, dessen Elemente *Punkte* heißen, und einem System $\mathcal{G}$ von Teilmengen von $\mathcal{P}$, dessen Elemente *Geraden* heißen, für die folgende drei Axiome erfüllt sind:

Axiom 1 (Verbindbarkeit)
Zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält.

Die Gerade, die die zwei gegebenen Punkte enthält, wird *Verbindungsgerade* genannt. Bezeichung: PQ bezeichnet die P und Q enthaltende Gerade. Punkte, die zu ein und derselben Geraden gehören, werden *kollinear* genannt. Geraden, die ein und denselben Punkt enthalten, heißen *kopunktal*.

Axiom 2 (Nichttrivialität)
Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht zu ein und derselben Geraden gehören.

Zwei Geraden heißen *parallel*, in Zeichen: $\parallel$, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, oder wenn sie gleich sind.

Axiom 3 (Parallelenaxiom)
Zu einer beliebigen Geraden g und einem beliebigen Punkt P gibt es genau eine Gerade, die zu g parallel ist und den Punkt P enthält.

Satz 1 *Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis:
Reflexivität und Symmetrie folgen sofort aus der Definition. Transitivität: Wäre $g \| h$ und $h \| k$, aber nicht $g \| k$, so hätten g und k genau einen gemeinsamen Punkt, durch den es dann zwei Parallelen zu h gäbe, im Widerspruch zum Parallelenaxiom.
Die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation „parallel" werden *Richtungen* oder auch *Parallelenscharen* genannt. Aus Axiom 3 folgt sofort, daß es mindestens drei Richtungen gibt. Das Parallelenaxiom kann so formuliert werden: Zu einer Richtung und einem Punkt gibt es genau eine Gerade in der gegebenen Richtung, die den gegebenen Punkt enthält.

Satz 2 *Zwei beliebige Geraden sind gleichmächtig.*

Beweis:
Seien g, h Geraden und $\mathbf{R}$ eine Richtung, der weder g noch h angehört. Für $X \in g$ sei $\pi(X)$ der Punkt $h \cap p_X$, wo p_X die Gerade in Richtung $\mathbf{R}$ durch X ist. Die Abbildung π, die man *Parallelprojektion* nennt, ist eine Bijektion von g auf h.

Beispiele für affine Inzidenzebenen:

1. $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{G} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.
2. Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper.
   $\mathcal{P} = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$,
   $\mathcal{G} = \{\{(x, y) \in \mathcal{P} : \; ax + by + c = 0\} \; : \; a, b, c \in \mathbf{K}, \; a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}$.
   Ist $\mathbf{K}$ der Körper der reellen Zahlen, so ergibt sich die bekannte reelle affine Ebene.
   Ist $\mathbf{K}$ der Restklassenkörper modulo 2, so ergibt sich bei geeigneter Bezeichnung Beispiel 1.

1.1.2 Dilatationen: Translationen und Streckungen; Desarguesscher Satz

1.1.2.1 Dilatationen

Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Inzidenzebene.
Definition: Eine bijektive Abbildung von $\mathcal{P}$ auf sich heißt *Kollineation*, wenn die Bildmengen von Geraden wieder Geraden sind.

Folgerungen:
Die Bildmengen zweier paralleler Geraden bei Kollineation sind wieder parallele Geraden (wegen der Injektivität der Kollineation).
Die Kollineationen bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe mit der identischen Abbildung als Neutralelement.

Definition: Eine Kollineation heißt *Dilatation* oder auch *Dehnung*, wenn die Original- und Bildgeraden stets parallel sind.

Die Dilatationen bilden offenbar eine Untergruppe der Kollineationsgruppe.

Hier ist allerdings noch nicht klar, ob die Gruppe außer der identischen Abbildung überhaupt weitere Abbildungen enthält. Es lassen sich dennoch einige Aussagen beweisen.

Satz 3 *Hat eine Dilatation mindesten zwei Fixpunkte, so ist sie die identische Abbildung.*

Beweis:
Sei φ eine Dilatation und A, B Punkte mit $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$ und ein Punkt mit $X \notin AB$. Es ist $\varphi(AX) \| \varphi(A)\varphi(X) = A\varphi(X) = AX$, $\varphi(BX) \| \varphi(B)\varphi(X) = B\varphi(X) = BX$, $\varphi(X) = \varphi(AX \cap BX) = \varphi(AX) \cap \varphi(BX) = AX \cap BX = X$. Für $Y \in AB$ wendet man denselben Schluß auf A, X, Y an.

Eine von der Identität verschiedene Dilatation hat folglich keine Fixpunkte oder genau einen Fixpunkt. Demnach gibt es genau zwei von der identischen Abbildung verschiedene Typen von Dilatationen, die wie folgt bezeichnet werden:

Definition:

Eine Kollineation heißt *Translationen* (auch: *Verschiebung*), wenn sie keine Fixpunkte hat oder die identische Abbildung ist.

Definition:

Eine Kollineation heißt *Streckung* (auch: *Homothetie*), wenn sie genau einen Fixpunkt hat oder die identische Abbildung ist.

Die identische Abbildung wird aus gruppentheoretischen Gründen sowohl zu den Translationen als auch zu den Streckungen gezählt.

Definition: Unter einer *Spur* einer von der identischen Abbildung verschiedenen Dilatation versteht man die Verbindungsgerade eines Originalpunktes, der nicht Fixpunkt ist, mit seinem Bildpunkt. Für die identische Abbildung wird jede Gerade als Spur definiert.

Der Schnittpunkt zweier Spuren einer Dilatation ist Fixpunkt dieser Dilatation. Aus der definierenden Eigenschaft von Dilatationen folgt ferner: Jede Spur einer Dilatation ist Fixgerade dieser Dilatation, und umgekehrt ist jede Fixgerade eine Spur.

1.1.2.2 Translationen, Vektoren

Translationen sind genau die fixpunktfreien Dilatationen und die identische Abbildung. Eine Translation ($\neq id.$) hat folglich nur parallele Spuren. Diese bilden eine Richtung, sie heißt *Translationsrichtung.* Hat umgekehrt eine Dilatation zwei parallele Spuren, so ist sie eine Translation (denn hätte diese Dilatation einen Fixpunkt, so müßte er auf den beiden Spuren liegen, was nicht geht).

Hilfssatz 1 *Zu zwei Punkten A, B gibt es höchstens eine Translation, bei der A auf B abgebildet wird.*

Beweis:
Seien τ_1, τ_2 zwei Translationen mit $\tau_i(A) = B$ $(i = 1, 2)$ und C ein Punkt außerhalb AB. Für $i = 1$ und $i = 2$ gehört $\tau_i(C)$ als Punkt der Spur durch C zur Parallelen zu AB durch C, ferner gehört $\tau_i(C)$ zur Parallelen zur Originalgeraden AC durch B, also ist $\tau_1(C) = \tau_2(C)$. Die Dilatation $\tau_2^{-1}\tau_1$ hat demnach die beiden Fixpunkte A und C, mittels Satz 3 folgt $\tau_1 = \tau_2$.

Satz 4 *Die Translationen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.*

Beweis:
Da eine Kollineation dieselben Fixpunkte wie die zugehörige inverse Abbildung hat, ist die Umkehrabbildung einer Translation wieder Translation. Gilt für zwei Translationen τ_1, τ_2 und einen Punkt F die Gleichung $\tau_1\tau_2(F) = F$, so folgt $\tau_1(F) = \tau_2^{-1}(F)$, mittels Hilfssatz 1 also $\tau_1 = \tau_2^{-1}$, d.h., $\tau_1\tau_2 = id.$

Satz 5 *Die Translationen, die eine feste Richtung als Translationsrichtung haben, bilden zusammen mit der identischen Abbildung eine Gruppe.*

Beweis:
Ist eine Gerade Spur bei zwei Translationen gleichzeitig, so auch bei deren Produkt und bei ihren Inversen.

Satz 6 *Das Produkt zweier Translationen ist kommutativ (falls es überhaupt Translationen mit zwei unterschiedlichen Richtungen gibt).*

Beweis:
Seien τ_1 und τ_2 zwei Translationen. Haben sie unterschiedliche Richtungen, so ist für einen beliebigen Punkt A sowohl $\tau_1\tau_2(A)$ als auch $\tau_2\tau_1(A)$ gleich dem Schnittpunkt der Parallelen zu $A\tau_1(A)$ durch $\tau_2(A)$ mit der Parallelen zu $A\tau_2(A)$ durch $\tau_1(A)$, also ist $\tau_1\tau_2(A) = \tau_2\tau_1(A)$, folglich nach Hilfssatz 1 überhaupt $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. Haben τ_1, τ_2 die gleiche Translationsrichtung, so betrachte man eine Translation τ_3 mit einer davon verschieden Richtung. Dann haben auch τ_1 und $\tau_2\tau_3$ verschiedene Richtungen, und es wird $\tau_1\tau_2 = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_3^{-1} = \tau_2\tau_3\tau_1\tau_3^{-1} = \tau_2\tau_1\tau_3\tau_3^{-1} = \tau_2\tau_1$.

Die Vektorschreibweise für Translationen:

Für die Translationen ist eine spezielle Bezeichnungsweise üblich, mit der der Begriff *Vektor* verbunden ist. Jede Abbildung kann bekanntlich als Menge von geordneten Paaren ($Original, Bild$) beschrieben werden. Ein geordnetes Paar (X, Y) aus zwei Punkten nennt man auch einen *Pfeil* mit dem Anfangspunkt X und dem Endpunkt Y. Somit kann jede Abbildung einer Ebene auf sich als Menge von Pfeilen angesehen werden. Speziell für Translationen ist es üblich, diese Pfeilmenge als Vektor zu bezeichnen.

Definition: Ein *Vektor* ist eine Menge von Pfeilen (= geordneten Punktepaaren), die eine Translation bilden.

Zur Symbolik: Ist (A, B) ein Pfeil, so wird der nach Hilfssatz 1 durch ihn bestimmte Vektor (es gibt höchstens einen) mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet. Also: Ist τ die Translation mit $\tau(A) = B$, so ist $\tau = \overrightarrow{AB}$.

Die Pfeile, die eine Translation τ bilden, haben nun offenbar folgende Eigenschaften: Jeder Pfeil liegt auf einer Spur von τ, die Trägergeraden zweier Pfeile sind parallel, und die Verbindungsgerade der Anfangspunkte zweier Pfeile ist parallel zur Verbindungsgerade der Endpunkte der beiden Pfeile.

Man unterscheide sorgfältig zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ und dem Pfeil (A, B), der den Vektor $\overrightarrow{AB}$ repräsentiert.

Für die Hintereinanderausführung von Translationen benutzt man bei der Vektorschreibweise (auf Grund der Kommutativität) das Plus-Zeichen:

$$\text{Ist } \tau_1 = \overrightarrow{AB},\ \tau_2 = \overrightarrow{PQ},\ \text{so ist } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ} = \tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2 = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB}.$$

Offensichtlich gilt dann für beliebige Punkte X, Y, Z die Gleichung

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

Die identische Abbildung $\overrightarrow{XX}$ wird als *Nullvektor* bezeichnet, $\overrightarrow{XX} = 0$, es ist $\overrightarrow{AB} + 0 = 0 + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. Zu $\overrightarrow{AB}$ invers ist offenbar der Vektor $\overrightarrow{BA}$, man schreibt $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ und statt $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD})$ schreibt man $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

Hinweis: Es ist bis jetzt denkbar daß für $A \neq B$ die Gleichung $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, also $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ gilt, im Widerspruch zur Anschauung. Genaueres hierzu wird im Abschnitt 1.1.4 (Fano-Axiom) erläutert.

Die funktionale Schreibweise $\overrightarrow{AB}(X) = Y$ ist im Zusammenhang mit der Vektorschreibweise nicht gebräuchlich, man schreibt statt dessen einfach $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$. gelegentlich findet man aber auch die Schreibweise $X + \overrightarrow{AB} = Y$ (sog. Punkt-Vektor-Addition).

1.1.2.3 Streckungen

Streckungen sind die Dilatationen mit genau einem Fixpunkt, der *Zentrum* der Streckung genannt wird. Die Spuren einer Streckung sind genau die sämtlichen Geraden durch das Zentrum. Original-, Bildpunkt und Zentrum sind also bei Streckung stets kollinear.

Hilfssatz 2 *Zu drei kollinearen Punkten Z, A, B mit A, $B \neq Z$ existiert höchstens eine Streckung mit dem Zentrum Z, bei der A auf B abgebildet wird.*

Beweis:
Seien ζ_1, ζ_2 zwei Streckungen mit $\zeta_i(Z) = Z$ und $\zeta_i(A) = B$, $i = 1, 2$. Es hat $\zeta_2^{-1}\zeta_1$ die Fixpunkte Z und A, mittels Satz 3 folgt die Behauptung.

1.1.2.4 Der Satz von Desargues

Die Hilfssätze 1 und 2 sind lediglich Einzigkeitssätze. Über die Existenz der in diesen Sätzen genannten Dilatationen kann aus den Axiomen 1 bis 3 nichts gefolgert werden. Bei der Untersuchung der Existenzfrage für Streckungen wird man schnell auf folgende Aussage geführt:

Satz von Desargues
Es seien a, b, c drei kopunktale Geraden, A_1, A_2 Punkte auf a, B_1, B_2 Punkte auf b und C_1, C_2 Punkte auf c. Dann gilt: Wenn $A_1B_1 \| A_2B_2$ und $A_1C_1 \| A_2C_2$ ist, dann ist auch $B_1C_1 \| B_2C_2$.

Hilfssatz 3 *In einer affinen Inzidenzebene ist der Satz von Desargues genau dann richtig, wenn es zu beliebigen drei kollinearen Punkten Z, A, B mit $Z \neq A$, $Z \neq B$ eine Streckung mit dem Zentrum Z gibt, bei der A auf B abgebildet wird.*

Beweis:
1. Die Existenzaussage für Streckungen sei richtig. Dann gilt auch der Satz von Desargues, denn die Streckung mit dem gemeinsamen Punkt von a, b, c, die A_1 auf A_2 abbildet, bildet B_1 auf B_2 und C_1 auf C_2 ab.
2. Der Satz von Desargues sei richtig, und Z, A, B seien gegeben. Es wird eine Abbildung φ von $\mathcal{P}$ auf sich konstruiert, die sich als Streckung erweist. Für Punkte $X \notin ZA$ sei zunächst $\varphi_1(X)$ der Schnittpunkt von ZX mit der Parallelen zu AX durch B. Ein Punkt $P \notin ZA$ werde gewählt, und für Punkte $Y \notin ZP$ sei $\varphi_2(Y)$ der Schnittpunkt von ZY mit der Parallelen zu YP durch $\varphi_1(P)$. Es ist φ_1 eine bijektive Abbildung von $\mathcal{P}\backslash ZA$ auf sich, φ_2 eine ebensolche von $\mathcal{P}\backslash ZP$ auf sich. Mit Hilfe des Satzes von Desargues schließt man, daß beide Abbildungen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, und ebenfalls mittels des Satzes von Desargues folgt, daß die Abbildung

$$\varphi(X) = \begin{cases} \varphi_1(X) & \text{für} \quad X \in \mathcal{P} \setminus ZA \\ \varphi_2(X) & \text{für} \quad X \in \mathcal{P} \setminus ZP \\ Z & \text{für} \quad X = Z \end{cases}$$

die für Dilatationen charakteristische Eigenschaft $XY \| \varphi(X)\varphi(Y)$ hat.

Bemerkung: *Der Satz von Desargues kann aus den Axiomen* 1 *bis* 3 *nicht hergeleitet werden.*
(Beweis durch Angabe einer sog. nicht-desarguessche Ebene, also eines Systems $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, das Axiom 1 bis 3 erfüllt, in dem aber der Satz von Desargues nicht richtig ist, siehe Übungen).

Für den weiteren Aufbau der Geometrie wird nun durch ein zusätzliches Axiom der Satz von Desargues als richtig vorausgesetzt:

Axiom 4 (Satz von Desargues)
Es seien a, b, c drei kopunktale Geraden, A_1, A_2 Punkte auf a, B_1, B_2 Punkte auf b und C_1, C_2 Punkte auf c. Dann gilt: Wenn $A_1B_1 \| A_2B_2$ und $A_1C_1 \| A_2C_2$ ist, dann ist auch $B_1C_1 \| B_2C_2$.

Affine Inzidenzebenen, in denen Axiom 4 erfüllt ist, heißen *Desarguessche Ebenen.*
Aus den Hilfssätzen 2 und 3 folgt nun:

Satz 7 *Zu drei kollinearen Punkten Z, A, B mit $A, B \neq Z$ existiert genau eine Streckung mit dem Zentrum Z, bei der A auf B abgebildet wird.*

Für Translationen kann die Einzigkeitsaussage von Hilfssatz 1 ergänzt werden zu:

Satz 8 *Zu zwei beliebigen Punkten A, B existiert genau eine Translation, bei der A auf B abgebildet wird.*

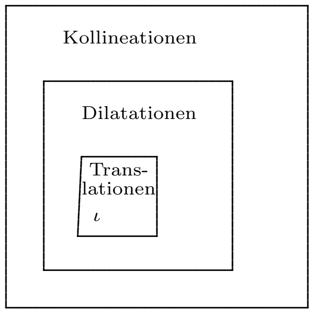
Beweis:
Es sei vorausgesetzt, daß jede Gerade mindestens drei Punkte enthält (für den verbleibenden Fall: Übungsaufgabe!), ferner sei $A \neq B$. Z sei ein von A und B verschiedener Punkt von AB. Sei ζ_1 die Streckung mit dem Zentrum Z, die A auf B abbildet. P sei ein Punkt außerhalb AB, $\zeta_1(P) = Q$. Die Parallele zu AB durch P schneide QB in R. ζ_2 sei die Streckung mit dem Zentrum B, und $\zeta_2(Q) = R$. $\zeta_2\zeta_1$ ist eine Dilatation, die A auf B abbildet, und sie hat keine Fixpunkte; denn wäre $\zeta_2\zeta_1(F) = F$, so wäre $F \in AB$, wegen $\zeta_2\zeta_1(P) = R$ muß PR durch F gehen, im Widerspruch zu $PR \| AB$.

Die Sätzen 4, 6 und 8 können zusammengefaßt werden zut:

Satz 9 *Die Translationen bilden eine kommutative Gruppe, die auf $\mathcal{P}$ einfach transitiv ist.*

1.1.3 Der Koordinatenkörper einer affinen Inzidenzebene; Satz von PAPPOS

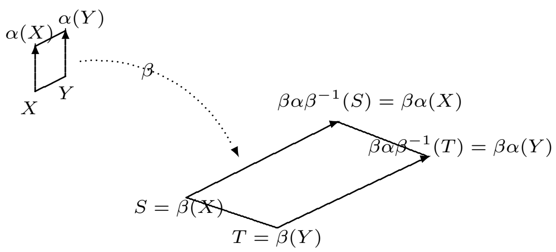
1.1.3.1 Streckung von Translationen



Die Kollineationen bilden eine Gruppe, die Dilatationen sind darin eine Untergruppe.
Die Translationen bilden eine Untergruppe der Dilatationengruppe.
Außer der Hintereinanderausführung $\beta \circ \alpha$ von zwei Kollineationen ist noch eine weitere Operation aus zwei Kollineationen von Nutzen, die sogenannte *gruppentheoretische Transformation* von α mit β. Sie wird folgendermaßen vorgenommen:
α bestehe aus der Menge von Pfeilen $M := \{(X, \alpha(X)) : \ X \in \mathcal{P}\}$. Nun wird auf jeden Pfeil die Kollineation β angewendet, es entsteht die Pfeilmenge $M' := \{(\beta(X), \beta\alpha(X)) : X \in \mathcal{P}\}$. Da β eine Bijektion von $\mathcal{P}$ auf sich ist, durchläuft $\beta(X)$ ganz $\mathcal{P}$, wenn X ganz $\mathcal{P}$ durchläuft. Setzt man $S := \beta(X)$, also $X = \beta^{-1}(S)$, so wird

$$M' = \{(S, \beta\alpha\beta^{-1}(S)) : \ S \in \mathcal{P}\}.$$

Diese Pfeilmenge stellt offenbar die Kollineation $\beta\alpha\beta^{-1}$ dar. Man sagt: $\beta\alpha\beta^{-1}$ entsteht aus α durch gruppentheoretische Transformation mit β.



Man kann auch sagen: α wird der Abbildung β unterworfen, oder: Auf α wird β angewendet. Man unterscheide aber sorgfältig die gruppentheoretisch Transformierte $\beta\alpha\beta^{-1}$ von der Hintereinanderausführung $\beta\alpha$.

Es gilt:

Satz 10 *Ist φ eine Kollineation, δ eine Dilatation, so ist auch $\varphi\delta\varphi^{-1}$ eine Dilatation, und zwar gilt:*

$\varphi\delta\varphi^{-1}$ ist eine Streckung, wenn δ eine Streckung ist, und
$\varphi\delta\varphi^{-1}$ ist eine Translation, wenn δ eine Translation ist.

Beweis:
Das System der Richtungen wird bei φ^{-1} auf sich abgebildet, es bleibt bei δ fest, und bei φ wird die durch φ^{-1} bewirkte Abbildung des Richtungssystems rückgängig gemacht, also bleibt das Richtungssystem bei $\varphi\delta\varphi^{-1}$ elementweise fest, die Abbildung ist eine Dilatation. Ferner gilt: δ hat den Fixpunkt $F \Leftrightarrow \delta(F) = F \Leftrightarrow \delta\varphi^{-1}\varphi(F) = F \Leftrightarrow \varphi\delta\varphi^{-1}(\varphi(F)) = \varphi(F) \Leftrightarrow \varphi\delta\varphi^{-1}$ hat den Fixpunkt $\varphi(F)$; somit ist $\varphi\delta\varphi^{-1}$ genau dann Streckung, wenn δ Streckung ist.

Im Falle einer Streckung ζ und einer Translation τ sagt man: *$\zeta\tau\zeta^{-1}$ ist aus τ durch Anwendung der Streckung ζ entstanden* bzw.: Die Translation τ wurde mit ζ „gestreckt".

1.1.3.2 Streckungsfaktoren

Wendet man auf eine Translation zwei verschiedene Streckungen an, so müssen die Ergebnisse nicht verschieden sein. Daher wird definiert:

Zwei Streckungen ζ_1, ζ_2 sind äquivalent genau dann, wenn für jede Translation τ gilt:

$$\zeta_1\tau\zeta_1^{-1} = \zeta_2\tau\zeta_2^{-1}$$

Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Streckungen. Die zugehörigen Klassen werden *Streckungsfaktoren* oder kurz *Faktoren* genannt.

Bezeichnung: Ist a eine solche Klasse, τ eine Translation, so sind für alle ζ aus a die Translationen $\zeta\tau\zeta^{-1}$ einander gleich, also nicht von ζ, sondern nur von a abhängig. Diese Translation wird dann einfach mit $a\tau$ bezeichnet,

$$a\tau := \zeta\tau\zeta^{-1} \quad \text{mit beliebigem } \zeta \in a.$$

Es gilt folgender Repräsentantensatz:

Satz 11 *Ist Z ein beliebiger Punkt und a ein Streckungsfaktor, so gibt es genau eine Streckung mit dem Zentrum Z, die zum Faktor a gehört.*

Beweis:
Zu a gehört mindestens eine Streckung ζ_0, sie habe das Zentrum Z_0. Es sei τ_0 die Translation, die Z_0 auf Z abbildet, und es sei $\zeta_1 := \tau_0\zeta_0\tau_0^{-1}$. Dann ist ζ_1 eine Streckung mit dem Zentrum Z. Es gehört ζ_1 wie ζ_0 zum Faktor a, denn ist τ eine beliebige Translation, so gilt

$$\zeta_1\tau\zeta_1^{-1} = \tau_0\zeta_0\tau_0^{-1}\tau\tau_0\zeta_0^{-1}\tau_0^{-1} = \tau_0\zeta_0\tau\zeta_0^{-1}\tau_0^{-1} = \tau_0\tau_0^{-1}\zeta_0\tau\zeta_0^{-1} = \zeta_0\tau\zeta_0^{-1},$$

d.h., ζ_1 und ζ_0 sind äquivalent, ζ_1 ist eine in der Behauptung des Satzes genannte Streckung. - Sind ζ_1 und ζ_2 zwei Streckungen mit dem gleichen Zentrum Z, die zum gleichen Faktor gehören, so gilt $\zeta_1\tau\zeta_1^{-1} = \zeta_2\tau\zeta_2^{-1}$ für jede Translation τ. Anwendung der beiden Seiten dieser Gleichung auf den Punkt Z liefert $\zeta_1(\tau(Z)) = \zeta_2(\tau(Z))$, und das bedeutet für $\tau \neq id$ nach Satz 7, daß $\zeta_1 = \zeta_2$ ist.
Weiter gilt

Satz 12 *Sind ζ_1 und ζ_2 zwei Streckungen mit den Zentren Z_1 und Z_2 und ist τ die Translation, die Z_1 auf Z_2 abbildet, dann gilt:*

$$\zeta_1,\ \zeta_2 \text{ gehören zum gleichen Streckungsfaktor} \quad\Longleftrightarrow\quad \zeta_2 = \tau\zeta_1\tau^{-1}$$

Beweis:
„$\Longleftarrow$“: $\widetilde{\tau}$ sei eine beliebige Translation. Dann gilt $\zeta_2\widetilde{\tau}\zeta_2^{-1} = \tau\zeta_1\tau^{-1}\widetilde{\tau}\tau\zeta_1^{-1}\tau^{-1} = \tau\zeta_1\widetilde{\tau}\zeta_1^{-1}\tau^{-1} = \zeta_1\widetilde{\tau}\zeta_1^{-1}$.
„$\Longrightarrow$.“:... Folgt aus Satz 11 und dem eben Bewiesenen.
Satz 12 kann auch so formuliert werden: Zwei Streckungen gehören genau dann zu ein und demselben Streckungsfaktor, wenn sie durch gruppentheoretische Transformation mit einer Translation auseinander hervorgehen.
Ferner gilt

Hilfssatz 4 (1) *Ist ζ eine Streckung mit dem Zentrum Z und τ ein Translation, die Z auf den Punkt A abbildet und ist ferner $B := \zeta(A)$, so ist $\zeta\tau\zeta^{-1}$ die Translation, die Z auf B abbildet.*

(2) *Ist a ein Streckungsfaktor und τ eine Translation, so hat die Translation $a\tau$ dieselbe Translationsrichtung wie τ.*

(3) *Haben die Translationen τ_1, τ_2 dieselbe Translationsrichtung, so existiert zu beliebig gegebenem Zentrum Z genau eine Streckung ζ mit diesem Zentrum, so daß*

$$\tau_2 = \zeta\tau_1\zeta^{-1}$$

gilt, und zwar ist ζ diejenige Streckung mit dem Zentrum Z, die $\tau_1(Z)$ auf $\tau_2(Z)$ abbildet.

(4) *Haben zwei Translationen τ_1, τ_2 dieselbe Translationsrichtung, so existiert genau ein Streckungsfaktor a mit $\tau_2 = a\tau_1$.*

Beweis:

Zu (1): Nach Satz 10 ist $\zeta\tau\zeta^{-1}$ eine Translation. Es ist $\zeta\tau\zeta^{-1}(Z) = \zeta\tau(Z) = \zeta(A) = B$.

Zu (2): Es sei ζ eine a repräsentierende Streckung mit dem Zentrum Z. Mit den Bezeichnungen wie in (1) gilt, daß die Punkte Z, A, B kollinear sind. Die Verschiebungsrichtung von τ ist durch die Gerade ZA gegeben und die Richtung von $a\tau$, also von $\zeta\tau\zeta^{-1}$, durch die Gerade ZB, beide Richtungen sind gleich.

Zu (3): Nach Voraussetzung sind $Z, \tau_1(Z), \tau_2(Z)$ kollinear, also existiert eine Streckung ζ mit dem Zentrum Z, die $\tau_1(Z)$ auf $\tau_2(Z)$ abbildet. Es wird dann $\zeta\tau_1\zeta^{-1}(Z) = \zeta\tau_1(Z) = \zeta(\tau_1(Z)) = \tau_2(Z)$, also stimmen nach Satz 8 τ_2 und $\zeta\tau_1\zeta^{-1}$ überein. - Hat man zwei Streckungen ζ_1, ζ_2 mit dem Zentrum Z und $\tau_2 = \zeta_1\tau_1\zeta_1^{-1} = \zeta_2\tau_1\zeta_2^{-1}$, so folgt durch Anwendung auf den Punkt Z die Gleichung $\zeta_1\tau_1(Z) = \zeta_2\tau_1(Z)$, und hieraus folgt nach Satz 7 die Gleichung $\zeta_1 = \zeta_2$.

Zu (4): Es seien τ_1, τ_2 die beiden Translationen und ζ_0 eine nach (3) existierende Streckung mit $\tau_2 = \zeta_0\tau_1\zeta_0^{-1}$. Ist ζ_1 zu ζ_0 äquivalent, so gilt ebenfalls $\tau_2 = \zeta_1\tau_1\zeta_1^{-1}$, und wegen der Einzigkeitsforderung in (3) und Satz 11 muß jede Streckung ζ_1 mit $\tau_2 = \zeta_1\tau_1\zeta_1^{-1}$ zu ζ_0 äquivalent sein.

Es werden nun in der Menge der Streckungsfaktoren zwei Rechenoperationen eingeführt.

Erste Operation: Multiplikation

Eine erste Operation ergibt sich einfach durch Hintereinanderausführung von Repräsentanten mit gleichem Zentrum. Es sei Z ein beliebiger, fest gewählter Punkt; und ζ_x bezeichne die Streckung mit dem Zentrum Z, die zum Streckungsfaktor x gehört.

Definition: Der Streckungsfaktoren von $\zeta_a \circ \zeta_b$ wird mit ab bezeichnet und das Produkt von a und b genannt,

$$\zeta_{ab} := \zeta_a \circ \zeta_b.$$

Es ist zu zeigen, daß eine andere Wahl des gemeinsamen Zentrums der beiden Streckungen nichts am Ergebnis ändert (Repräsentantenunabhängigkeit):

Die Streckungen $\zeta_a \in a$ und $\zeta_b \in b$ mögen das Zentrum Z haben, und die Streckung $\zeta := \zeta_a\zeta_b$ möge zum Faktor c gehören. Ferner seien $\zeta_a' \in a$ und $\zeta_b' \in b$ zwei andere Repräsentanten mit einem gemeinsamen Zentrum Z', und $\zeta' := \zeta_a'\zeta_b'$ gehöre zum Faktor c'. Zu zeigen ist, daß ζ und ζ' äquivalent sind, d.h., daß für alle Translationen τ gilt: $\zeta'\tau\zeta'^{-1} = \zeta\tau\zeta^{-1}$. Nach Satz 12 gilt aber, wenn τ_0 die Translation ist, die Z auf Z' abbildet, $\zeta_a' = \tau_0\zeta_a\tau_0^{-1}$ sowie $\zeta_b' = \tau_0\zeta_b\tau_0^{-1}$. Ist τ eine beliebige Translation, so folgt:

$$\zeta'\tau\zeta'^{-1} = \zeta_a'\zeta_b'\tau\zeta_b'^{-1}\zeta_a'^{-1} = \tau_0\zeta_a\tau_0^{-1}\tau_0\zeta_b\tau_0^{-1}\tau\tau_0\zeta_b^{-1}\tau_0^{-1}\tau_0\zeta_a^{-1}\tau_0^{-1} = \tau_0\zeta\tau\zeta^{-1}\tau_0^{-1} = \zeta\tau\zeta^{-1},$$

was zu zeigen war.

Aus der Definition der Multiplikation folgt, daß die Streckungsfaktoren eineindeutig den Streckungen mit einem festen Zentrum zugeordnet sind derart, daß dem Produkt zweier Faktoren die Hintereinanderausführung der Streckungen entspricht. Da die Streckungen mit einem festen Zentrum eine Gruppe bilden, besteht Isomorphie zwischen dieser Gruppe und der Struktur, die die Streckungsfaktoren bezüglich der Multiplikation bilden. Die Multiplikation der Streckungsfaktoren ist insbesondere assoziativ, es gibt ein Neutralelement (durch die identische Abbildung repräsentiert), und zu jedem Faktor gibt es einen Inversen. Über die Kommutativität der Multiplikation kann ohne ein weiteres Axiom noch nichts bewiesen werden.

Zweite Operation: Addition

Statt wie bei der Multiplikation zwei Repräsentanten ζ_1, ζ_2 zweier Faktoren a, b hintereinander auszuführen, kann man mit einer beliebigen Translation τ_0 die Translationen $a\tau_0$ und $b\tau_0$ bilden, sie hintereinander ausführen und den Faktor, der τ_0 in die Ergebnistranslation der Hintereinanderausführung überführt, als Ergebnis einer zweiten Operation mit a und b definieren, sie wird Addition genannt. Im einzelnen:

Definition: Es seien a, b zwei Streckungsfaktoren und $\tau_0 \neq id$ eine beliebige Translation. Die Hintereinanderausführung der Translationen $a\tau_0$, $b\tau_0$ ergibt eine Translation τ_0' gleicher Richtung wie τ_0. Der nach Hilfssatz 5 (4) existierende Streckungsfaktor c mit $\tau_0' = c\tau_0$ wird mit $a + b$ bezeichnet und Summe von a und b genannt, also

$$(a + b)\tau := a\tau \circ b\tau.$$

Es ist zu zeigen, daß c unabhängig von der Wahl von τ_0 ist (Repräsentantenunabhängigkeit):

Es sei τ_1 eine weitere Translation, und zunächst sei vorausgesetzt, daß τ_0 und τ_1 verschiedene Translationsrichtungen haben. Es seien $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ Streckungen mit dem Zentrum Z, die zu den Faktoren a, b, c gehören. Dann gilt nach Definition von c die Gleichung

$$\zeta_a\tau_0\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau_0\zeta_b^{-1} = \zeta_c\tau_0\zeta_c^{-1}.$$

Zu zeigen ist, daß auch

$$\zeta_a\tau_1\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau_1\zeta_b^{-1} = \zeta_c\tau_1\zeta_c^{-1} \qquad (*)$$

gilt. Auf Jeder Seite von $(*)$ steht eine Translation in Richtung von τ_1. Es wird gezeigt, daß der Punkt Z bei Anwendung der beiden Seiten von $(*)$ zum gleichen Bild führt. Es sei $A := \tau_0(Z)$ und $B := \zeta_c(A)$, es folgt $\zeta_c\tau_0\zeta_c^{-1}(Z) = B$. Ferner sei $A_1 := \tau_1(Z)$. Es folgt, daß $\zeta_c\tau_1\zeta_c^{-1}(Z) = \zeta_c(A_1)$ der Schnittpunkt der

Geraden ZA_1 mit der Parallelen zu AA_1 durch B ist. Für die Berechnung der linken Seite von $(*)$ wird $\tau_2 := \tau_1\tau_0^{-1}$, also $\tau_1 = \tau_2\tau_0$ gesetzt. Einsetzen und Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
&\zeta_a\tau_2\tau_0\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau_2\tau_0\zeta_b^{-1} = \\
&\quad = (\zeta_a\tau_2\zeta_a^{-1})(\zeta_a\tau_0\zeta_a^{-1})(\zeta_b\tau_2\zeta_b^{-1})(\zeta_b\tau_0\zeta_b^{-1}) = \\
&\quad = (\zeta_a\tau_2\zeta_a^{-1})(\zeta_b\tau_2\zeta_b^{-1})(\zeta_a\tau_0\zeta_a^{-1})(\zeta_b\tau_0\zeta_b^{-1}) = \\
&\quad = \zeta_a\tau_2\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau_2\zeta_b^{-1}\zeta_c\tau_0\zeta_c^{-1}
\end{aligned}$$

Anwendung auf den Punkt Z ergibt

$$\zeta_a\tau_2\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau_2\zeta_b^{-1}\zeta_c\tau_0\zeta_c^{-1}(Z) = \zeta_a\tau_2\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau_2\zeta_b^{-1}(B),$$

und dieser Punkt liegt auf der Geraden durch B in Richtung von τ_2, andererseits liegt das Bild von Z auf der Geraden durch Z in Richtung der Geraden AA_1, insgesamt ist dies auch wieder der Punkt $\zeta_c(A_1)$, was zu zeigen war.
Haben τ_0 und τ_1 dieselbe Translationsrichtung, so gehe man zunächst zu einer Translation anderer Richtung über, verfahre wie eben und gehe dann zu τ_1 über. - Damit ist die Unabhängigkeit der Summe von der Auswahl der Repräsentanten nachgewiesen.

Wird in der Menge aller Streckungen mit dem Zentrum Z die Streckung, die zum Faktor x gehört, mit ζ_x bezeichnet, dann gilt für beliebige Streckungsfaktoren a, b und für jede Translation τ die Gleichung

$$\zeta_{a+b}\tau\zeta_{a+b}^{-1} = \zeta_a\tau\zeta_a^{-1}\zeta_b\tau\zeta_b^{-1}.$$

Aus der Definition der Addition folgt sofort, daß sie kommutativ ist. Zur Untersuchung weiterer Rechengesetze ist es zweckmäßig, folgende durch die Definition der Addition nahegelegte Zuordnung zu betrachten: τ_0 sei eine feste Translation $\neq id.$ und es wird zugeordnet

$$a \mapsto a\tau_0.$$

Diese Zuordnung ordnet jedem Streckungsfaktor eine Translation aus der Gruppe aller Translationen in Richtung von τ_0 zu. Die Zuordnung ist

- injektiv (wegen Hilfssatz 4),
- bezüglich der Addition operationstreu, d.h. $a + b \mapsto (a + b)\tau_0 = a\tau_0 \circ b\tau_0$,
- zunächst nicht surjektiv, denn die identische Abbildung hat kein Original, weil für jede Streckung ζ gilt: $\zeta\tau_0\zeta^{-1} = id \iff \tau_0 = id$.

Man erweitert daher die Menge der Streckungsfaktoren um den *Nullfaktor* 0 (dieser ist keine Klasse von äquivalenten Streckungen, er kann nicht durch eine Streckung repräsentiert werden), er wird definiert durch

Definition $0\tau := id$ für alle Translationen τ,

und die obige Zuordnung wird durch $0 \mapsto id$ ergänzt. Es gilt dann offenbar für jeden Streckungsfaktor a die Gleichung $0 + a = a + 0 = a$, denn es ist nach Definition der Addition $(0 + a)\tau = 0\tau \circ a\tau = a\tau$, der Nullfaktor ist also neutrales Element für die Addition. Die Zuordnung $a \mapsto a\tau_0$ ist nun bijektiv und operationstreu, also ein Isomorphismus zwischen der Gruppe, die die Translationen in Richtung von τ_0 bezüglich der Hintereinanderausführung bilden und der Struktur, die die um den Nullfaktor erweiterte Menge der Streckungsfaktoren bezüglich der Addition bildet.

Die Menge aller Streckungsfaktoren zusammen mit dem Nullfaktor werde mit $\mathbb{K}$ bezeichnet, $\mathbb{K}^*$ bezeichne die Menge aller Streckungsfaktoren ohne den Nullfaktor. Dann ist bis jetzt gezeigt:

- $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, sie ist isomorph zur Gruppe aller Translationen einer festen Richtung.
- $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ ist eine Gruppe, sie ist isomorph zur Gruppe aller Streckungen mit einem festen Zentrum.

Addition und Multiplikation sind durch Distributivgesetze verknüpft (bei deren Formulierung wird von der Klammerregel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ Gebrauch gemacht):

$$\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Beweis:

Bemerkung: Da über die Kommutativität der Multiplikation noch nichts bekannt ist (und ohne ein weiteres Axiom auch nichts bewiesen werden kann), müssen beide Gesetze bewiesen werden, für eine kommutative Multiplikation würde sofort eine der beiden Gleichuzngen aus der anderen folgen.

Beide Gleichungen sind sicher erfüllt, wenn a oder b oder c der Nullfaktor ist. Seien also a, b, c seien alle vom Nullfaktor verschieden, und $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \ldots$ seien repräsentierende Streckungen mit dem Zentrum Z. Dann gilt für beliebige Translationen $\tau \neq id$:

$$\begin{aligned} (a \cdot (b+c))\tau &= \zeta_a(b+c)\tau\zeta_a^{-1} = \zeta_a\zeta_b\tau\zeta_b^{-1}\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_a^{-1} \\ (a \cdot b + a \cdot c)\tau &= \zeta_{ab}\tau\zeta_{ab}^{-1}\zeta_{ac}\tau\zeta_{ac}^{-1} = \zeta_a\zeta_b\tau\zeta_b^{-1}\zeta_a^{-1}\zeta_a\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_a^{-1} = \zeta_a\zeta_b\tau\zeta_b^{-1}\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_a^{-1}, \end{aligned}$$

also gilt die erste Gleichung. Weiter gilt für beliebige Translationen τ

$$\begin{aligned} (a \cdot (b+c))\tau &= \zeta_{a+b}\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_{a+b}^{-1} = \zeta_a\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_a^{-1}\zeta_b\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_b^{-1} \\ &\text{und} \\ (ac+bc)\tau &= \zeta_{ac}\tau\zeta_{ac}^{-1}\zeta_{bc}\tau\zeta_{bc}^{-1} = \zeta_a\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_a^{-1}\zeta_b\zeta_c\tau\zeta_c^{-1}\zeta_c^{-1}, \end{aligned}$$

also gilt die zweite Gleichung.

Insgesamt folgt nun: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist ein (nicht notwendig kommutativer) Körper (ein sog. *Schiefkörper*), also gilt

Satz 13 *Die Streckungsfaktoren bilden einen Schiefkörper. Seine additive Gruppe ist isomorph zur Gruppe der Translationen mit einer festen (beliebigen) Translationsrichtung, und seine multiplikative Gruppe ist isomorph zur Gruppe der Streckungen mit einem (beliebigen) gemeinsamen Zentrum.*

1.1.3.3 Zweidimensionale Vektorräume in desarguesschen Ebenen

Verwendet man für die Translationen die Vektorschreibweise und schreibt die Anwendung eines Streckungsfaktors als Multiplikation (ohne Operationszeichen), so folgt aus der Definition der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{K}$, daß für beliebige a, $b \in \mathbb{K}$ und beliebige Vektoren $\vec{v}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a+b)\vec{v} &= a\vec{v} + b\vec{v}, \\ a(b\vec{v}) &= (ab)\vec{v} \end{aligned}$$

gelten.

Ferner hat man für beliebige Translationen τ_1, τ_2, Faktoren $a \in \mathbb{K}$ und Streckungen $\zeta_a \in a$ die Gleichung $a(\tau_1 \circ \tau_2) = \zeta_a\tau_1\tau_2\zeta_a^{-1} = \zeta_a\tau_1\zeta_a^{-1}\zeta_a\tau_2\zeta_a^{-1} = a\tau_1 \circ a\tau_2$, also in Vektorschreibweise $\overrightarrow{v} := \tau_1$, $\overrightarrow{w} := \tau_2$:

$$a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}.$$

Schließlich ist für das Neutralelement 1 in $(\mathbb{K}^*, \cdot)$, das durch die identische Abbildung repräsentiert wird, wegen $id \circ \tau = \tau$ für alle Translationen τ die Gleichung

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \text{ für alle } \vec{v}$$

erfüllt. Dies alles zusammen mit der Gruppeneigenschaft der Translationen ergibt, daß die Translationen über $\mathbb{K}$ einen Vektorraum bilden. Es ist unter Benutzung von Satz 7 leicht zu verifizieren, daß nach Wahl zweier Translationen unterschiedlicher Richtung sich jede weitere Translation als Linearkombination dieser beiden darstellen läßt, das heißt, der genannte Vektorraum ist zweidimensional.

Insgesamt gilt:

Satz 14 *Die Translationen einer desarguesschen Ebene bilden über dem Schiefkörper ihrer Streckungsfaktoren einen zweidimensionalen Vektorraum.*

Nach Wahl eines Punktes O kann man jedem Punkt $X \in \mathcal{P}$ den Vektor $\overrightarrow{OX}$ zuordnen ("Ortsvektor"). Diese Zuordnung ist bijektiv und ermöglicht es, Punkte und Vektoren zu identifizieren und desarguessche Ebenen einfach als zweidimensionale Vektorräume anzusehen. Dadurch ist ein eleganter Zugang zur Elementargeometrie gegeben.

Mit Satz 14 ist klar, daß in desarguesschen Ebenen in üblicher Weise affine Koordinaten eingeführt werden können. Punkte und Punktmengen können wie aus der Koordinatengeometrie bekannt durch Gleichungen für ihre Koordinaten beschrieben werden, siehe **1.1.1**, Beispiel 2. Allerdings hat man bis jetzt das Kommutativgesetz der Multiplikation noch nicht zur Verfügung.

Der Körper $\mathbb{K}$ wird gelegentlich auch als *Koordinaten(schief)körper* der betreffenden affinen Ebene bezeichnet.

1.1.3.4 Der Satz von Pappos

Da die multiplikative Gruppe des Koordinatenschiefkörpers isomorph zur Gruppe der Streckungen mit einem festen Zentrum ist, ist das Kommutativgesetz der Multiplikation gleichbedeutend mit der Vertauschbarkeit zweier Streckungen mit demselben Zentrum. Diese Vertauschbarkeit kann umformuliert werden:
Seien ζ_1 und ζ_2 zwei Streckungen mit dem Zentrum Z, $A \neq Z$ ein beliebiger Punkt, $B = \zeta_1(A)$, $C = \zeta_2(B) = \zeta_2\zeta_1(A)$, ferner sei P ein beliebiger Punkt $\notin ZA$, $Q = \zeta_2(P)$, $R = \zeta_1(Q) = \zeta_1\zeta_2(P)$. Wegen $BR = \zeta_1(AQ)$ und $CQ = \zeta_2(BP)$ ist $AQ \| BR$, $CQ \| PB$. Es gilt $\zeta_1\zeta_2 = \zeta_2\zeta_1$ genau dann, wenn $AP \| CR$ ist. Somit ist die Vertauschbarkeit zweier beliebiger Streckungen mit gleichem Zentrum genau dann möglich, wenn folgender Satz richtig ist:

Satz von Pappos
Es seien g und g' zwei Geraden, A, B, C Punkte von g und A', B', C' Punkte von g', wobei keiner dieser sechs Punkte zu g und g' gleichzeitig gehört. Dann gilt: Wenn $AB' \| BA'$ und $AC' \| CA'$ ist, dann ist auch $BC' \| B'C$.

Bemerkung: Der Satz von Pappos handelt von einer geometrischen Figur, die so beschrieben werden kann: Es liegen zwei Dreiermengen von kollinearen Punkten vor, die durch eine Bijektion ϕ einander zugeordnet sind, und für je zwei Punkte X, Y aus der einen Dreiermenge gilt $X\phi(Y) \| Y\phi(X)$. Der Satz von Pappos sagt, daß aus zwei von diesen drei Parallelitäten die dritte folgt.
Ist $\mathbb{K}$ ein nicht kommutativer Körper, so kann in der aus diesem Körper gemäß 1.1., Beispiel 2 gebildeten affinen Inzidenzebene der Satz von Pappos nicht gelten. Folglich ist der Satz von Pappos nicht aus den Axiomen 1 bis 4 herleitbar. Es gilt aber:

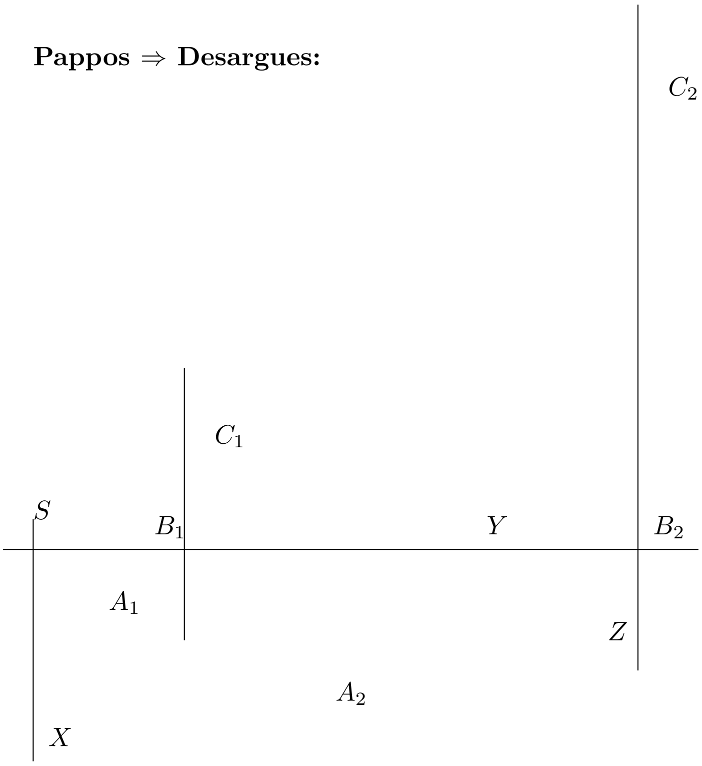
Satz 15 *Aus dem Satz von Pappos folgt der Satz von Desargues.*

Beweis:
Es seien $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ Punkte, für die die drei Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 kopunktal mit dem Schnittpunkt S sind und für die $A_1B_1 \| A_2B_2$ und $A_1C_1 \| A_2C_2$ ist. Zu zeigen ist: $B_1C_1 \| B_2C_2$.
Erster Fall: $B_1C_1 \nparallel SA_1$.
Es sei x die Parallele zu B_1C_1 durch S, sie ist $\neq SA_1$.
Ferner sei $X := x \cap C_1A_1$, es ist $X \notin SA_1$.
Es sei y die Parallele zu SA_1 durch C_1 und $Y := y \cap SB_1$.
Behauptung 1: $XY \| A_1B_1$.
Beweis: Für die Tripel (A_1, C_1, X) und (Y, S, B_1) gelten die beiden Parallelitäten $A_1S \| C_1Y$ und $C_1B_1 \| SX$ nach Voraussetzung, also gilt nach dem Satz von Pappos auch $A_1B_1 \| XY$.
Es sei $Z := XA_2 \cap C_1Y$. Es sind dann S, A_1, Z nicht kollinear.
Behauptung 2: $SX \| C_2Z$.
Beweis: Für die Tripel (S, C_2, C_1) und (Z, X, A_2) gilt nach der Konstruktion von Z: $SA_2 \| C_1Z$ und nach Voraussetzung und wegen der Konstruktion von X auch $SX \| C_2Z$, folglich gilt nach Pappos die Behauptung.
Behauptung 3: $SX \| B_2Z$.
Für die Tripel (S, B_2, Y) und (Z, X, A_2) gilt $SA_2 \| YZ$ nach Konstruktion von y, ferner $B_2A_2 \| XY$ wegen Behauptung 1 und der Voraussetzung, hieraus folgt nach dem Satz von Pappos die behauptete Parallelität.

Aus Behauptung 2 und 3 folgt $B_2Z \| C_2Z$, also sind Z, B_2, C_2 kollinear, und es ist $SX \| B_2C_2$. Nach der Definition von x ist aber $SX \| B_1C_1$, also $B_1C_1 \| B_2C_2$. d h., die Behauptung des Satzes von Desargues gilt.

Zweiter Fall: $B_1C_1 \| SA_1$.
Man betrachte eine Gerade g durch S, $\neq SA_1, SB_1, SC_1$ und nicht parallel zu A_1C_1. Mit $D_i := A_iC_i \cap g$ kann man den ersten Fall je auf die Punktetripel A_i, B_i, D_i und D_i, B_i, C_i anwenden.

Pappos $\Rightarrow$ Desargues:



Damit ist der Satz bewiesen.

Um also nicht-kommutative Körper per Axiom auszuschließen, genügt es, den Satz von Pappos als Axiom zu fordern. Damit erübrigt sich aber Axiom 4. Daher wird Axiom 4 ersetzt durch:

$$\boxed{\textbf{Axiom } 4^* \;:\Leftrightarrow\; \textbf{Satz von Pappos}}$$

Damit ist eine axiomatische Grundlage für affine Inzidenzgeometrien über kommutativen Körpern gegeben.

1.1.4 FANO-Axiom, involutorische Dilatationen, Mittelpunkte

Eine bijektive Abbildung einer Menge auf sich heißt *involutorisch* bzw. eine *Involution*, wenn sie mit sich selbst zusammengesetz die identische Abbildung ergibt, aber selbst von der identischen Abbildung verschieden ist. Eine Involution stimmt also mit ihrer Umkehrabbildung überein, Original- und Bildelemente werden einfach miteinander vertauscht. Für eine Involution ϕ gilt $\phi \circ \phi = id.$, involutorische Abbildungen sind also - gruppentheoretisch gesehen - besonders einfache Abbildungen.

1.1.4.1 Das FANO-Axiom und äquivalente Aussagen

Eine vierelementige Menge läßt sich auf genau drei Weisen in zwei verschiedene disjunkte Zweiermengen zerlegen. Besteht die Menge aus vier nicht kollinearen Punkten und ordnet man bei einer solchen Zerlegung jeder Zweiermenge die Verbindungsgerade ihrer Punkte zu, so ergibt jede der drei Zerlegungen ein Geradenpaar. Wenn zwei dieser Geradenpaare aus parallelen Geraden bestehen, dann nennt man die vier Punkte ein *Parallelogramm*. Die Frage, ob das dritte Geradenpaar - diese Geraden heißen *Diagonalen* - auch aus Parallelen besteht oder bestehen kann, läßt sich auf Grund der Axiome 1 bis 4 bzw. 4^* nicht definitiv beantworten: In Beispiel 1 aus 1.1. sind die Diagonalen parallel, in Beispiel 2 mit den reellen Zahlen als Körper $\mathbb{K}$ sind in keinem Parallelogramm die Diagonalen parallel.

FANO-Axiom
Sind A, B, C, D vier nicht kollineare Punkte mit $AB \| CD$ und $AC \| BD$, so haben die Geraden AD und BC einen gemeinsamen Punkt.

Satz 16 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) FANO-*Axiom.*
(2) Es gibt keine involutorischen Translationen.
(3) Es gibt involutorische Streckungen.
(4) Die Charakteristik des Koordinatenkörpers ist ungleich zwei.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2):
Ist τ eine Translation und sind A und B Punkte nicht in Translationsrichtung von τ, so sind die Punkte $A, B, \tau(A), \tau(B)$ ein Parallelogramm, denn es sind die Geraden $A\tau(A)$ und $B\tau(B)$ Spuren von τ, also parallel, und $AB \| \tau(A)\tau(B)$ nach der definierenden Eigenschaft von Dilatationen. Ist nun τ involutorisch, so ist $\tau(\tau(B)) = B$, also $A\tau(B) \| \tau(A\tau(B)) = \tau(A)B$, d.h., das FANO-Axiom gilt nicht.
(2) $\Rightarrow$ (1):
Es gelte das FANO-Axiom nicht, es gebe also Punkte A, B, C, D mit $AB \| CD$, $AC \| BD$, $AD \| BC$. Es sei τ die Translation, die A auf B abbildet. Wegen $AB \| CD$ ist CD eine Spur, also $\tau(C) \in CD$, andererseits gehört $\tau(C)$ zur Parallelen zu AC durch $\tau(A) = B$, also zu BD, somit ist $\tau(C) = CD \cap BD = D$. Es gehört $\tau(B)$ zur Spur durch B, also zu AB, andererseits gehört $\tau(B)$ zu Parallelen zu BC durch $\tau(C) = D$, also zu AD, somit ist $\tau(B) = AB \cap AD = A$. Mittels Satz 8 folgt $\tau = \tau^{-1}$, d.h., τ ist involutorisch.
(1) $\Rightarrow$ (3):
Sind A, B, C, D Punkte mit den im FANO-Axiom genannten Eigenschaften, Z der Punkt $AD \cap BC$ und ζ die Streckung mit dem Zentrum Z, die A auf D abbildet, so gehört wegen $B \in AB$ der Bildpunkt $\zeta(B)$ zur Parallele zu AB durch $\zeta(A)$, also zu CD; außerdem gehört er zu BZ, ist also gleich C. Analog folgt $\zeta(D) = A$. Mittels Satz 7 folgt, daß ζ eine Involution ist.
(3) $\Rightarrow$ (1):
Ist Z Zentrum einer involutorischen Streckung ζ und sind P, Q zwei mit Z nicht kollineare Punkte, so sind die vier Punkte $P, Q, \zeta(P), \zeta(Q)$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen den gemeinsamen Punkt Z haben. Sind A, B, C, D vier Punkte mit den im FANO-Axiom genannten Voraussetzungen, so kann man diese durch eine geeignete Dilatation auf vier (geeignete) Punkte $P, Q, \zeta(P), \zeta(Q)$ abbilden, das Urbild von Z ist dann Schnittpunkt von AD mit BC. (Man wähle P auf der Parallelen zu AD durch Z und Q als Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch P mit der Parallelen zu BC durch Z. Es sei τ die Translation mit $\tau(A) = P$, ζ_1 die Streckung mit Zentrum P und $\zeta_1(\tau(D)) = \zeta(P)$. Die Dilatation $\zeta_1\tau$ leistet das Gewünschte.)
(2) $\Leftrightarrow$ (4):
Diese Äquivalenz ergibt sich mittels Satz 13 aus der Isomorphie der additiven Gruppe des Koordinatenkörpers mit den Gruppen von Translationen fester Richtungen. Diese Isomorphie zeigt überdies: Wenn eine Translation involutorisch ist, dann sind alle Translationen ($\neq id.$) involutorisch.

1.1.4.2 Mittelpunkte und Punktspiegelungen

A und B seien zwei voneinander verschiedene Punkte. Ein Punkt M heißt *Mittelpunkt* von A und B, wenn es eine Translation gibt, bei der M das Bild von A und B das Bild von M ist.
Bemerkung: A und B gehen in diese Definition nur scheinbar unsymmetrisch ein, denn mit $\tau(A) = M$ und $\tau(M) = B$ gilt für die Umkehrabbildung $\tau^{-1}(B) = M$ und $\tau^{-1}(M) = A$.

Satz 17 *Zu zwei gegebenen Punkten gibt es höchstens einen Mittelpunkt, und dieser ist mit den gegebenen Punkten kollinear.*

Beweis:

Sind M_1, M_2 zwei Mittelpunkte von von A und B, gibt es also zwei Translationen τ_1, τ_2 mit $\tau_i(A) = M_i$, $\tau_i(M_i) = B$, $i = 1, 2$, so gilt $\tau_1^2(A) = \tau_2^2(A) = B$, also $\tau_2^{-2}\tau_1^2 = (\tau_2^{-1}\tau_1)^2 = id$. Gilt das Fano-Axiom, so gibt es keine involutorische Translation, also muß schon $\tau_2^{-1}\tau_1 = id$ sein, d.h., $\tau_2 = \tau_1$, $M_1 = M_2$. Gilt das Fano-Axiom nicht, so ist $\tau_i^2 = id$, $\tau_i^2(A) = B$ also nicht möglich, d.h., es gibt keinen Mittelpunkt. Im Falle der Existenz eines Mittelpunktes und einer Translation τ mit $\tau(A) = M$, $\tau(M) = B$ gilt $\tau(AM) = MB$ und $AM\|MB$, also ist $AM = MB = AB$.

Satz 18 *Der Schnittpunkt von Parallelogrammdiagonalen (falls existent) ist Mittelpunkt von je zwei Paralellogrammpunkten, die eine Diagonale bestimmen.*

Beweis:
Seien A, B, C, D vier nicht kollineare Punkte mit $AB\|CD$ und $AC\|BD$ und $S = AD \cap BC$, ferner τ, τ_1, τ_2 die Translationen mit $\tau(A) = S$, $\tau_1(A) = B$, $\tau_2(B) = S$ und es sei $S' = \tau_1(S)$. Es folgt: S' gehört zur Parallelen zu AS bzw. SD durch B und wegen $\tau_1(C) = D$ auch zur Parallelen zu CS bzw. CB durch D, hieraus folgt $\tau_2(S') = D$. ferner ist $\tau = \tau_2\tau_1$, somit $\tau(A) = S$, $\tau(S) = \tau_2\tau_1(S) = \tau_2(S') = D$, also ist S Mittelpunkt von A und D. Analog: Von B und C.

Satz 19 *Wenn das* Fano-*Axiom gilt, gibt es zu zwei Punkten immer einen Mittelpunkt.*

Beweis:
Seien P, Q zwei beliebige Punkte, X ein Punkt $\notin PQ$, Y der Schnittpunkt der Parallelen zu PX durch Q mit der Paralellen zu QX durch P. P, X, Q, Y bilden dann ein Paralellogramm mit PQ als einer Diagonalen, XY schneidet diese nach Satz 20 im Mittelpunkt von PQ.

Der folgende Satz zeigt eine weitere Möglichkeit, den Mittelpunktsbegriff zu definieren.

Satz 20 *Der Punkt M ist Mittelpunkt von A und B genau dann, wenn die Streckung mit dem Zentrum M, die A auf B abbildet, involutorisch ist.*

Beweis:
a) Es sei M Mittelpunkt von A und B, τ die Translation mit $\tau(A) = M$, $\tau(M) = B$, und ζ sei die Streckung mit dem Zentrum M, die A auf B abbildet. Es sei X ein beliebiger Punkt, $X \notin AB$, und X' der Schnittpunkt der Parallelen zu AX durch B mit der Parallelen zu BX durch A. Die Punkte A, X, B, X' bilden ein Parallelogramm mit den Diagonalen AB und XX', nach den Sätzen 17 und 18 ist M Diagonalenschnittpunkt. Ferner ist $X' = \zeta(X)$. Es ist $\zeta(X') \in MX'$ und $\zeta(X') \in \zeta(AX')$, die Gerade $\zeta(AX')$ ist die Parallele zu AX' durch B, also ist $\zeta(X') = X$. Also vertauscht ζ die Punkte X und X' und ist somit involutorisch.
b) Es sei ζ eine involutorische Streckung mit dem Zentrum M, die A auf B abbildet. Ist $X \notin AB$, so sind die Punkte $A, B, X, \zeta(X)$ ein Parallelogramm mit den Diagonalen AB und $X\zeta(X)$, deren Schnittpunkt M nach Satz 18 Mittelpunkt von A und B ist.

Satz 21 *Die Eigenschaft, Mittelpunkt zu sein, ist gegen Kollineation invariant, ebenso gegen Parallelprojektion (in einer Richtung, die von der Richtung der die Punkte enthaltenden Geraden verschieden ist).*

Beweis:
1.: Ist M Mittelpunkt von A und B, d.h., $M = \tau(A)$, $B = \tau(M)$ mit einer geeigneten Translation τ und ϕ eine Kollineation, so ist nach Satz 9 die Dilatation $\phi\tau\phi^{-1}$ eine Translation τ', und es ist, wenn $M' = \phi(M)$, $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$ gesetzt wird,
$M' = \phi(M) = \phi\tau(A) = \phi\tau\phi^{-1}\phi(A) = \tau'(A')$,
$B' = \phi(B) = \phi\tau(M) = \phi\tau\phi^{-1}\phi(M) = \tau'(M')$,
also ist die Mittelpunktseigenschaft bei Anwendung von ϕ invariant.
2.: Parallelprojektion auf eine zur Originalgeraden parallele Gerade kann als Ausschnitt aus einer Translation angesehen werden. Mittels der Vertauschbarkeit von Translationen ergibt sich die Invarianz der Mittelpunktseigenschaft. ($M = \tau(A)$, $B = \tau(M)$ hat zur Folge, wenn τ_1 die die Parallelprojektion bewirkende Translation ist: $\tau_1(M) = \tau_1\tau(A) = \tau\tau_1(A)$, $\tau_1(B) = \tau_1\tau(M) = \tau\tau_1(M)$, also ist $\tau_1(M)$ Mittelpunkt von $\tau_1(A)$ und $\tau_1(B)$).
3.: Bei Parallelprojektion von einer Originalgeraden auf eine dazu nicht parallele Gerade genügt es wegen

2., den Fall zu betrachten, in dem der Mittelpunkt gemeinsamer Punkt von Original- und Bildgeraden ist. Sei M Mittelpunkkt von A und B und π Parallelprojektion von AB auf eine M enthaltende Gerade. Bei der Streckung mit dem Zentrum M, die A auf B abbildet, wird $\pi(A)$ auf $\pi(B)$ abgebildet. Nach Satz 20 ist diese Streckung involutorisch und M auch Mittelpunkt von $\pi(A)$ und $\pi(B)$.

Definition: Die involutorischen Streckungen werden *Punktspiegelungen* genannt.

Setzt man das FANO-Axiom als gültig voraus, dann ergibt sich aus dem Vorhergegangenen leicht, daß es zu jedem Punkt genau eine Punktspiegelung mit diesem Punkt als Zentrum gibt. Die Punktspiegelung mit dem Zentrum P werde mit σ_P bezeichnet und auch *Punktspiegelung an P* genannt. Es gilt dann für alle Punkte $X \neq P$: Der Punkt, an dem gespiegelt wird, ist Mittelpunkt zu Original- und Bildpunkt.

Ferner gilt

Satz 22 *Für beliebige Punkte A, B ist das Produkt $\sigma_B\sigma_A$ der Punktspiegelungen an A und B die Translation $\tau \circ \tau$, wobei τ die Translation mit $\tau(A) = B$ ist.*

Beweis:
Es ist $\tau\sigma_A\tau^{-1}$ eine Dilatation mit dem Fixpunkt B, und sie ist involutorisch, also ist $\tau\sigma_A\tau^{-1} = \sigma_B$. Folglich ist $\sigma_B\sigma_A = \tau\sigma_A\tau^{-1}\sigma_A$ Nach Satz 10 ist $\sigma_A\tau^{-1}\sigma_A$ eine Translation τ_1, also ist $\sigma_B\sigma_A = \tau\tau_1$ eine Translation. Sei $C = \sigma_B(A)$, es ist dann B Mittelpunkt von A und C, also $C = \tau^2(A)$, d.h., $\sigma_B\sigma_A(A) = \sigma_B(A) = \tau^2(A)$.

Folgerung:

Wenn das FANO-Axiom gilt, läßt sich jede Translation als Produkt zweier Punktspiegelungen darstellen, wobei eines der beiden Zentren beliebig gewählt werden kann: Ist A beliebig, gilt $\tau(A) = B$ und ist M der Mittelpunkt zu A, B, so ist $\tau = \sigma_M\sigma_A$.

Satz 23 *Das Produkt dreier Punktspiegelungen $\sigma_C\sigma_B\sigma_A$ ist eine Punktspiegelung an dem Punkt D, für den $C = \tau(D)$ gilt, wenn τ die Translation mit $\tau(A) = B$ ist.*

Beweis: Wegen der Folgerung aus Satz 22 kann die Translation $\sigma_B\sigma_A$ in der Form $\sigma_C\sigma_D$ dargestellt werden.

Folgerung:

Die Translationen und Punktspiegelungen zusammengenommen bilden eine Untergruppe der Dilatationengruppe; die Punktspiegelungen bilden ein Erzeugendensystem dieser Untergruppe.

So wie die Mittelpunktsbildung eine Art „Halbierung einer Strecke“ (d.h. hier zweier Punkte) darstellt, läßt sich ohne weiteres für beliebige natürliche $n > 2$ – die Charakteristik von $\mathbb{K}$ als ungleich n vorausgesetzt – die n-Teilung einer Strecke definieren, und den Sätzen 19 und 21 entsprechende Sachverhalte können bewiesen werden.

1.1.5 Affinitäten

1.1.5.1 Das Teilverhältnis

Definition:

Es seien A, B, C drei kollineare Punkte mit $A \neq B$, $A \neq C$. Die Streckung mit dem Zentrum A, die B auf C abbildet, gehört zu einem Streckungsfaktor $a \in \mathbb{K}$. Dieses Körperelement a wird als *Teilverhältnis* der Punkte A, B, C bezeichnet,

$$TV(A, B, C) := a.$$

Äquivalente Definitionsmöglichkeit:

$$a = TV(A, B, C) \quad :\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}.$$

Denn ist τ die Translation mit $\tau(A) = B$ und ζ die genannte Streckung, so ist $a\tau = \zeta\tau\zeta^{-1}$, folglich $a\tau(A) = \zeta\tau\zeta^{-1}(A) = \zeta(B) = C$, also ist $a\tau$ die Translation, die A auf C abbildet.

Folgerungen:

1) Wendet man auf ein kollineares Punktetripel eine Dilatation an, so ändert sich sein Teilverhältnis nicht.

2) Wendet man auf ein kollineares Punktetripel eine Parallelprojektion an, so ändert sich sein Teilverhältnis nicht (Projektionsrichtung $\neq$ Richtung der Trägergeraden des Tripels).

3) Wendet man auf ein kollineares Punktetripel eine Zentralprojektion an, so daß die Bildpunkte auf einer zur Trägergeraden der Originale parallelen Geraden liegen, so haben die Bildpunkte das gleiche Teilverhältnis wie die Originale; und umgekehrt: Zwei Tripel kollinearer Punkte, die auf parallelen Geraden liegen und das gleiche Teilverhältnis haben, lassen sich durch eine Zentralprojektion ineinander überführen.

4) M ist genau dann der Mittelpunkt zu A, B, wenn $TV(M, A, B) = -1$ ist.

5) Zu gegebenen Punkten $A, B (\neq A)$ und einem $t \in \mathbb{K}$, $t \neq 0$ existiert genau ein Punkt C mit $TV(A, B, C) = t$.

Beweis von Folgerung 1):

Es seien A, B, C drei kollineare Punkte mit $A \neq B, C$ und $a = TV(A, B, C)$, also $a(\tau) = \zeta\tau\zeta^{-1}$ für alle Translationen τ, wobei ζ die Streckung mit dem Zentrum A ist, bei der B auf C abgebildet wird. Sei δ eine beliebige Dilatation, $A' := \delta(A)$, $B' := \delta(B)$, $C' := \delta(C)$, es sei ζ' die Streckung mit dem Zentrum A', bei der B' auf C' abgebildet wird. Es gehört ζ' zu einem Streckungsfaktor a' mit $a'\tau = \delta\tau\delta^{-1}$ für alle Translationen τ. Zu zeigen ist: $a\tau = a'\tau$ für alle Translationen τ. Nach Hilfssatz 4 ist $\zeta' = \delta\zeta\delta^{-1}$, also gilt

$$a'\tau = \delta\zeta\delta^{-1}\tau\delta\zeta^{-1}\delta^{-1}$$

Fall 1: δ ist Translation.

Da das Produkt von Translationen kommutativ ist, folgt $a'\tau = \delta\zeta\tau\zeta^{-1}\delta^{-1} = \delta a\tau\delta^{-1} = a\tau$.

Fall 2: δ ist eine Streckung.

δ gehört zu einem Streckungsfaktor b mit $b\tau := \delta\tau\delta^{-1}$ für alle τ. Es wird

$$a'\tau = \delta\zeta b^{-1}\tau\zeta^{-1}\delta^{-1} = \delta a(b^{-1}\tau)\delta^{-1} = (bab^{-1})\tau = (bb^{-1}a)\tau = a\tau,$$

wobei in der vorletzten Gleichheit des Satz von PAPPOS verwendet wurde.

Beweis von Folgerung 2):

Erfolgt die Parallelprojektion von einer Geraden auf eine zu ihr parallele, dann kann sie als Ausschnitt aus einer Translation angesehen werden, und nach Folgerung 1) folgt die Behauptung. Erfolgt die Parallelprojektion von einer Geraden auf eine zu ihr nicht parallele Gerade, so darf nach dem Bisherigen vorausgesetzt werden, daß der erste der drei Punkte Schnittpunkt der beiden Geraden ist. Dann ist aber die Parallelprojektion als Ausschnitt aus einer Streckung mit dem ersten Punkt als Zentrum anzusehen, und die beiden Punktetripel bestimmen dieselbe Streckung, also erst recht denselben Automorphismus der Translationengruppe.

Beweis von Folgerung 3):

Eine Zentralprojektion von einer Geraden auf eine zu ihr parallele Gerade kann als Ausschnitt aus einer Streckung mit dem Projektionszentrum als Zentrum angesehen werden; daraus folgt mit Folgerung 1) die Behauptung.

Beweis von Folgerung 4):

M ist Mittelpunkt zu A, B nach Definition genau dann, wenn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ist, also $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ gilt, und das bedeutet nach Definition die Gleichung $TV(M, A, B) = -1$.

Beweis von Folgerung 5):

t kann durch eine Streckung realisiert werden, deren Zentrum beliebig wählbar ist (s. Satz 11). Man wähle A als Zentrum, und C muß dann das Bild von B bei dieser Streckung sein.

6) Teilverhältnis in Koordinatendarstellung:

Es gilt für drei kollineare Punkte X_1, X_2, X_3, die in einem beliebigen Koordinatensystem die Koordinaten (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ haben:

$$TV(X_1, X_2, X_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

oder

$$TV(X_1, X_2, X_3) = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

oder beides, je nachdem, ob einer der Nenner Null ist.

1.1.5.2 Definition der Affinitäten, axiale Affinitäten

Definition: Die Kollineationen, bei denen das Teilverhältnis von Tripeln kollinearer Punkte invariant ist, werden
Affinitäten genannt.

Anders formuliert: Eine Kollineation φ heißt genau dann Affinität, wenn für beliebige drei kollineare Punkte X, Y, Z mit $X \neq Y$, $X \neq Z$ gilt:

$$TV(X, Y, Z) = TV(\varphi(x), \varphi(Y), \varphi(Z)).$$

Bemerkung: Folgende Sachverhalte gelten, sie werden aber hier nicht bewiesen (siehe Literatur zu den Grundlagen der Geometrie):

1.) Wenn der Koordinatenkörper $\mathbb{K}$ nur den identischen Automorphismus gestattet (wie z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$), dann ist jede Kollineation auch Affinität; im anderen Fall gibt es auch Kollineationen, die keine Affinität sind.

2.) Unter Benutzung eines beliebigen Koordinatensystems sind die Affinitäten genau die Abbildungen, die sich in der Form
$$x' = Ax + b, \qquad \text{rang}(A) = 2$$
darstellen lassen, wo x, x' 2-1-Matrizen sind, die die Koordinaten von Original- und Bildpunkt enthalten, A eine 2-2-Matrix und b eine 2-1-Matrix ist.

Folgerungen aus der Definition:

Hilfssatz 5 *Hat eine Affinität zwei Fixpunkte, so ist jeder Punkt der Verbindungsgeraden der Fixpunkte ein Fixpunkt (= Fixpunktgerade).*

Beweis: Sind F_1, F_2 Fixpunkte, $A \in F_1F_2$, A' sein Bild, so ist $TV(F_1, F_2, A) = TV(F_1, F_2, A')$, also nach Folgerung 5) aus der Definition des Teilverhältnisses $A = A'$.

Satz 24 *Hat eine Affinität drei nicht kollineare Fixpunkte, so ist sie die identische Abbildung.*

Beweis: Sind F_1, F_2, F_3 die Fixpunkte, so sind nach 1) sind sämtliche Punkte der Geraden F_1F_2 und F_1F_3 Fixpunkte. Ist X ein beliebiger Punkt der Ebene, so gibt es eine Gerade g durch X die sowohl F_1F_2 als auch F_1F_3 in je einem Punkt schneidet. Zu g gehören somit zwei Fixpunkte, also besteht g nach 1) aus lauter Fixpunkten, insbesondere ist X Fixpunkt und die Abbildung ist die identische Abbildung.

Definition: Eine Affinität $\neq id$ heißt *axiale Affinität* genau dann, wenn sie eine Fixpunktgerade hat. Die Fixpunktgerade heißt *Achse* der Affinität.

Folgerung: Bei axialer Affinität sind die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkt (Spuren) alle zueinander parallel. Die zugehörige Richtung heißt *Affinitätsrichtung*.

Beweis: Es sei a die Achse eines axialen Affinität α. Es kann angenommen werden, daß es einen Punkt P gibt, so daß die Gerade $P\alpha(P)$ die Achse schneidet, denn andernfalls sind alle Spuren parallel zu a, und der Beweis ist fertig. Es folgt, daß die Gerade PP' Fixgerade ist, denn ihr Bild muß den Schnittpunkt der Originalgeraden mit a sowie P' enthalten. Sei nun Q ein beliebiger Punkt $\notin P\alpha(P)$, und Q' sei sein Bild bei α. Parallele Geraden gehen wegen der Bijektivität der Abbildung in parallele Geraden über. Folglich geht die Parallele q zu PP' durch Q in eine Parallele zu PP' über, und da q die Achse schneidet, kann sie nur in sich übergehen. Folglich liegt Q' auf q, und die Behauptung ist bewiesen.

Also gibt es zwei Typen von axialen Affinitäten:

Typ 1: Die Affinitätsrichtung ist von der Richtung der Achse verschieden. Die Spuren schneiden die Achse, und für alle Punkte P ist das Teilverhältnis aus Schnittpunkt der Spur mit der Achse, Original- und Bildpunkt dasselbe (dies ergibt sich aus Folgerung 3 aus der Definition des Teilverhältnisses).

Typ 2: Affinitätsrichtung und Richtung der Achse stimmen überein.

Definition: Ein axiale Affinität heißt *Schrägstreckung* oder auch *axiale Streckung* genau dann, wenn ihre Affinitätsrichtung von der Richtung der Achse verschieden ist. Sie heißt *Scherung*, wenn ihre Affinitätsrichtung mit der Richtung der Achse übereinstimmt.

Satz 25 *Zu gegebener Achse a und zwei nicht zu a gehörenden Punkten P, P' gibt es genau eine axiale Affinität mit der Achse a, bei der P auf P' abgebildet wird.*

Beweis:

a) Höchstens eine: Das Bild eines beliebigen Punktes X ist durch die Forderungen, einerseits auf der Geraden durch X in Affinitätsrichtung, also auf der Parallelen durch X zu PP' zu liegen, andererseits auf der Geraden durch P' und den Schnittpunkt von PX mit der Achse (falls existent) zu liegen, eindeutig festgelegt.

b) Mindestens eine: Man konstruiert auf Grund der in a) beschriebenen Forderungen eine Abbildung und zeigt, daß sie eine das Teilverhältnis invariant lassende Kollineation ist. (Die Einzelheiten werden hier nicht ausgeführt.)

Satz 26 *Sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte, ebenso A', B', C', so gibt es genau eine Affinität, bei der A auf A', B auf B' und C auf C' abgebildet wird.*

Beweis: a) Mindestens eine: Es gibt eine axiale Affinität α_1 mit beliebiger, A und A' nicht enthaltender Achse, für die $\alpha_1(A) = A'$gilt, ferner eine axiale Affinität α_2 mit Achse durch A' und $\alpha_2(\alpha_1(B)) = B'$, und schließlich eine axiale Affinität α_3 mit $\alpha_3(\alpha_2\alpha_1(C)) = C'$. Die Affinität $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ bildet (A, B, C) auf (A', B', C') ab.
b) Höchstens eine: Sind φ_1, φ_2 zwei solche Affinitäten, so hat $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ die drei nichtkollinearen Fixpunkte A, B, C, ist also nach Satz 24 gleich der identischen Abbildung, $\varphi_2^{-1}\varphi_1 = id$, $\varphi_1 = \varphi_2$.
Es folgt

Satz 27 *Jede Affinität läßt sich als Produkt von höchstens drei axialen Affinitäten darstellen.*

<u>Involutorische axiale Affinitäten:</u>

Für folgende Betrachtungen wird das FANO-Axiom als gültig vorausgesetzt.

Bezüglich involutorischer axialer Affinitäten gelten folgende Behauptungen:

1) Eine axiale Affinität, die involutorisch ist, kann keine Scherung sein.
2) Eine Schrägstreckung σ mit der Achse a ist genau dann involutorisch, wenn für jeden Punkt $P \notin a$ gilt: Der Punkt $a \cap P\sigma(P)$ ist Mittelpunkt zu $P, \sigma(P)$.

Zum Beweis:

Hilfssatz 6 *Die Einschränkung einer Scherung auf eine ihrer Spuren stimmt mit der Einschränkung einer Translation auf diese Spur überein. (Scherungen wirken auf ihren Spuren wie Translationen.)*

Beweis: Sei α eine Scherung mit der Achse a, A ein Punkt $\notin a$, $B := \alpha(A)$, F ein Punkt auf a, P ein Punkt auf FA, $P \neq A, F$ und $Q := \alpha(P)$. Es liegt Q auf der Parallelen durch P zu a und auf FB. Sei $G := PB \cap a$. Dann liegt $\alpha(B)$ auf der Geraden AB (Scherungseigenschaft!) und auf GQ. Es folgt (Parallelprojektion von Punktetripeln!) $TV(F, A, P) = TV(G, \alpha(B), Q)$. Folglich gehören die Streckung mit Zentrum F und $A \mapsto P$ und die mit Zentrum G und $\alpha(B) \mapsto Q$ zu demselben Streckungsfaktor t, d.h., $t \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ und $t \cdot \overrightarrow{B\alpha(B)} = \overrightarrow{PQ}$, also $t \cdot \overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{B\alpha(B)}$, d.h. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\alpha(B)}$, und das bedeutet für die Translation τ, die A auf B abbildet, daß $\tau(B) = \alpha(B)$ ist, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Beweis von Behauptung 1):: Wäre eine Scherung involutorisch, so müßte eine Translation τ mit $\tau^2(A) = A$, also $\tau^2 = id$ existieren, was dem FANO-Axiom widerspräche.

Beweis von Behauptung 2): Sei σ involutorisch, $P' := \sigma(P)$, $F := a \cap PP'$. Dann ist

$$TV(F, P, P') = TV(\sigma(F), \sigma(P), \sigma(P')) = TV(F, P', P) = \frac{1}{TV(F, P, P')}$$

(s.Übungsaufgabe), folglich $(TV(F,P,P'))^2 = 1$. Wegen $P \neq P'$ kann $TV(F,P,P') = 1$ nicht gelten also ist es gleich - 1, somit F Mittelpunkt zu P, P'. Die Umkehrung kann durch Umkehr der einzelnen Schlüsse bewiesen werden.

Definition: Eine axiale Affinitäten heißt *Affinspiegelung* (an ihrer Achse) genau dann, wenn sie involutorisch ist.

Aus dem Bewiesenen folgt nun

Satz 28 *Zu einer gegebenen Geraden a und einer gegebenen Richtung, die von der Richtung von a verschieden ist, existiert genau eine Affinspiegelung an a in der gegebenen Richtung.*

Fixrichtungen bei Affinitäten

Bei Kollineationen werden wegen deren Bijektivität die Geraden einer jeden Richtung auf eine Geradenmenge abgebildet, die eine Richtung bilden, jede Kollineation bewirkt eine Abbildung des Systems aller Richtungen auf sich. Wird eine Richtung in sich selbst übergeführt, spricht man von *Fixrichtung*. Bei Dilatationen sind alle Richtungen Fixrichtung. Schrägstreckungen haben genau zwei Fixrichtungen, nämlich die Affinitätsrichtung und die Richtung der Achse, denn jede weder zur Achse noch zur Affinitätsrichtung parallele Gerade wird auf eine zu ihr nicht parallele gerade abgebildet. Scherungen haben genau eine Fixichtung, die Achsenrichtung. Allgemein gilt:

Satz 29 *Eine Affinität, die drei Fixrichtungen hat, ist eine Dilatation (d.h., alle Richtungen sind Fixrichtung).*

Beweis: Die Affinität α habe drei Fixrichtungen. A und B seien zwei Punkte so, daß die Gerade AB zu einer Fixrichtung gehört, und es sei $A' := \alpha(A)$, $B' := \alpha(B)$. Es sei τ die Translation mit $A \mapsto A'$. Es folgt $\tau(B) \in A'B'$. Es sei ζ die Streckung mit dem Zentrum A', bei der $\tau(B)$ auf B' abgebildet wird. Es stimmen dann α und $\zeta\tau$ längs der Geraden AB überein. Also ist $\alpha^{-1}\zeta\tau$ eine axiale Affinität mit AB als Achse. Da bei τ und ζ jede Richtung auf sich abgebildet wird, hat $\alpha^{-1}\zeta\tau$ wie α bzw α^{-1} drei Fixrichtungen, und das ist bei axialer Affinität nur so möglich, daß sie die identische Abbildung ist, $\alpha^{-1}\zeta\tau = id$, also $\zeta\tau = \alpha$, d.h., α ist eine Dilatation.

Es kann eine Affinität also nur entweder keine, eine oder zwei Fixrichtungen haben, oder sie ist eine Dilatation.

Beispiele für Affinitäten mit genau zwei Fixrichtungen: Schrägstreckungen.
Beispiele für Affinitäten mit genau einer Fixrichtung: Scherungen.

Ein Beispiel für eine Affinität ohne Fixrichtungen:

Es werden in der affinen Inzidenzebene über dem Körper der reellen Zahlen zwei spezielle Affinspiegelungen zusammengesetzt, dabei wird mit einem Koordinatensystem gearbeitet.

Erste Affinspiegelung: Affinspiegelung an der ersten Koordinatenachse in Richtung der zweiten Koordinatenachse. Da die Abbildungsmatrix als Spalten die Bilder der Basisvektoren enthält und der Koordinatenurspurung ein Fixpunkt ist, ergibt sich die Abbildungsgleichung in der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zweite Affinspiegelung: Affinspiegelung an der Geraden $x - y = 0$ in Richtung der Geraden $x + y = 0$. Für die Abbildungsgleichung ergibt sich aus zur ersten Spiegelung analogen Gründen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix der Zusammensetzung ist das Produkt der Abbildungsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fixrichtungen ergeben sich aus den Eigenvektoren der Abbildungsmatrix. Zu deren Bestimmung hat man die Eigenwerte zu berechnen. Die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte lautet hier

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

sie hat keine reellen Lösungen, so daß diese Abbildung in der Tat keine Fixrichtungen hat. Es handelt sich um eine spezielle *Affindrehung*.

Bemerkung:

Setzt man zwei Affinspiegelungen zusammen, bei denen jeweils die Achse einer Spiegelung in der Affinitätsrichtung der anderen liegt, so ergibt sich eine Punktspiegelung (Übungsaufgabe!)

Ferner kann man zeigen, daß in der reellen affinen Inzidenzebene die Affinspiegelungen in jedem Koordinatensystem eine Abbildungsmatrix mit Determinante -1 haben. Daraus folgt, daß die Affinspiegelungen eine echte Untergruppe der Gruppe aller Affinitäten erzeugen, diese enthält dann auch alle Punktspiegelungen und Translationen, aber außer den Punktspiegelungen keine weiteren Streckungen. Diese Gruppe nennt man die *äquiaffine Gruppe*.

1.2 Anordnung in affinen Inzidenzebenen

Historisch sind die geometrischen Anordnungsbeziehungen im Gegensatz zu den Inzidenzbeziehungen (Parallelenaxiom!) erst spät in den Blickpunkt einer axiomatischen Grundlegung der Geometrie gerückt. Solche Anordnungsbeziehungen sind zum Beispiel der durch die Anschauung nahegelegte Sachverhalt, daß von drei kollinearen Punkten einer „zwischen" den anderen beiden liegt, daß eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt und daß man eine Gerade „durchlaufen" kann, sie also als geordnete Menge aufgefaßt werden kann. Solche Sachverhalte werden in diesem Abschnitt genauer untersucht.

1.2.1 Anordnungsaxiome

Zur Erinnerung: Ordnungsrelationen

Eine Relation ϱ in einer Menge M wird (totale) *irreflexive Ordnung* genannt, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

ϱ ist irreflexiv:	für kein $x \in M$ ist $x\varrho x$
ϱ ist transitiv:	für alle $x, y, z \in M$ folgt aus $x\varrho y$ und $y\varrho z$ auch $x\varrho z$
ϱ ist konnex:	für alle $x, y \in M$ gilt: Es ist $x\varrho y$ oder $y\varrho x$ oder $x = y$.

Nimmt man zu einer irreflexiven Ordnungsrelation die Gleichheitsrelation hinzu, so ergibt sich eine (totale) *reflexive Ordnung*. Sie kann durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden:

reflexiv:	für kein $x \in M$ ist $x\varrho x$
transitiv:	für alle $x, y, z \in M$ folgt aus $x\varrho y$ und $y\varrho z$ auch $x\varrho z$
antisymmetrisch:	für alle $x, y \in M$ gilt: Wennt $x\varrho y$ und $y\varrho x$ gilt, so ist $x = y$.
linear:	für alle $x, y \in M$ gilt: Es ist $x\varrho y$ oder $y\varrho x$.

Ist ϱ eine Ordnungsrelation, so ist ihre inverse Relation ϱ' (definiert durch $x\varrho' y \Longleftrightarrow y\varrho x$) ebenfalls eine Ordnungsrelation, die zu ϱ entgegengesetzte.

Man kann zeigen, dass jede Menge auf viele Weisen mit einer Ordnungsrelationen versehen werden kann. Daher ist im folgenden Axiom davon die Rede, dass bestimmte Ordnungrelationen ausgezeichnet sind.

Die Anordnungslehre beruht auf folgendem Axiom:

Axiom 5 (Axiom über Anordnung)

(O1) Auf jeder Geraden ist eine Zweiermenge entgegengesetzter Ordnungsrelationen ausgezeichnet.

(O2) Ist g eine Gerade, $<$ eine der beiden Ordnungsrelationen auf g und P, Q Punkte von g mit $P < Q$, so existieren Punkte $X, Y, Z \in g$ mit $X < P < Y$ und $P < Z < Q$.

(O3) Es seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise parallele Geraden und a, b zwei Geraden, die zu den g_i nicht parallel sind, und es sei $A_i := a \cap g_i$, $B_i := b \cap g_i$ für $i = 1, 2, 3$. Gilt dann auf a bezüglich einer der beiden Ordnungsrelationen $A_1 < A_2 < A_3$, so gilt auf b bezüglich einer der beiden Ordnungsrelationen $B_1 < B_2 < B_3$ oder $B_3 < B_2 < B_1$.

Eine affine Inzidenzebene (Axiome **1** bis **3**), für die Axiom **5** gilt, heißt *angeordnet*.

Folgerung: Aus (O2) folgt, dass jede Gerade unendlich viele Punkte enthält.

Definition: Eine *orientierte Gerade* ist eine Gerade g, bei der eine der beiden nach (O1) vorliegenden Ordnungsrelationen ausgezeichnet ist. (Eine orientierte Gerade ist ein geordnetes Paar $(g, <)$.)

Jede Gerade kann somit auf genau zwei Weisen zu einer orientierten Geraden gemacht werden.

Für viele Sachverhalte ist die folgendermaßen für Punkte definierte *Zwischenrelation* wichtig:

Definition: Es seien X, Y, Z Punkte.

$$Zw(XYZ) \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} X, Y, Z \text{ sind paarweise verschieden und kollinear,} \\ \text{und bezüglich einer der beiden Orientierungen} \\ \text{ihrer Trägergeraden gilt } X < Y < Z \text{ oder } Z < Y < X. \end{array}$$

Folgerung: Das Bestehen der Zwischenrelation ist offenbar unabhängig von der Wahl einer der beiden betreffenden Anordnungen. Das Axiom (O3) bedeutet, dass die Zwischenrelation invariant gegen Parallelprojektion ist.

1.2.2 Halbgeraden, Strecken, konvexe Mengen, Halbebenen

Die Ordnungsrelationan auf Geraden führen zu bestimmten geometrisch wichtigen Teilmengen von Geraden, den *Halbgeraden* und den *Strecken*.

Definition: Es sei g eine Gerade, A ein Punkt auf g und $<$ eine der beiden Ordnungsrelationen auf g. Die Mengen

$$h_1 := \{X : \ X < A\} \cup \{A\} \quad \text{und} \quad h_2 := \{Y : \ A < Y\} \cup \{A\}$$

heißen die beiden von A auf g erzeugten *Halbgeraden* (auch: Strahlen).

Bemerkung: Bei Übergang zur entgegengesetzten Orientierung werden in dieser Definition h_2 und h_2 vertauscht, A erzeugt dieselbe Zweiermenge von Halbgeraden.
Es gilt $h_1 \cup h_2 = g$ und $h_1 \cap h_2 = \{A\}$.
Halbgeraden können auch über die Zwischenrelation charakterisiert werden: $X, Y \in g \backslash \{A\}$ gehören genau dann zu verschiedenen von A auf g erzeugten Halbgeraden, wenn $Zw(XAY)$ gilt.

Bezeichnungen und Symbolik:
A heißt *Anfangspunkt* von h_1, h_2.
AP^+ bezeichnet die von A auf der Geraden AP erzeugten Halbgeraden, die P enthält.
AP^- bezeichnet die von A auf der Geraden AP erzeugten Halbgeraden, die P nicht enthält.

Definition: Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so heißt

$$\overline{AB} := \{X : \ Zw(AXB)\} \cup \{A, B\}$$

die von A und B erzeugte *Strecke*. A, B heißten ihre *Rand-* oder *Endpunkte*.

Definition: Eine Punktmenge M heißt *konvex* genau dann, wenn für beliebige Punkte $X, Y \in M$ gilt:

$$\text{Aus} \quad X, Y \in M \quad \text{folgt} \quad \overline{XY} \subseteq M.$$

Folgerungen:

- Beispiele für konvexe Mengen sind: die gesamte Ebene $\mathcal{P}$, jede Gerade, jede Halbgerade, jede Strecke, jede einelementige Punktmenge.
- Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.
- Die Bildmenge einer konvexen Menge bei Parallelprojektion auf eine Gerade ist konvex.
- Das volle Urbild einer in einer Geraden enthaltenen konvexen Menge bei Parallelprojektion der Ebene auf diese Gerade ist konvex.

Satz 30 *Ist g eine Gerade, so existiert genau eine Zerlegung von $\mathcal{P} \setminus g$ in zwei nichtleere konvexe Teilmengen H_1, H_2 derart, dass für Punkte $X_1, X_2 \in \mathcal{P} \setminus g$ gilt: X_1, X_2 liegen genau dann in verschiedenen der Mengen H_1, H_2, wenn es einen Punkt $Z \in g$ gibt, für den $Zw(X_1 Z X_2)$ gilt.*

<u>Beweis:</u>

Existenz: h sei eine Gerade, die nicht parallel zu g ist, A der Schnittpunkt von g und h und h_1, h_2 die beiden von A auf h erzeugten Halbgeraden. Die Urbilder von $h_1 \setminus \{A\}$ und $h_2 \setminus \{A\}$ bei Parallelprojektion von $\mathcal{P}$ in Richtung g auf h haben die im Satz genannten Eigenschaften von H_1 und H_2.
Einzigkeit: Sei K_1, K_2 eine weitere derartige Zerlegung. Bei Parallelprojektion auf h in Richtung g ist für $i = 1, 2$ die Bildmenge von K_i in der Menge $(h_1 \cup h_2) \setminus \{A\}$ enthalten, wegen der Konvexität von K_i ist

sie notwendig entweder in $h_1 \setminus \{A\}$ oder in $h_2 \setminus \{A\}$ enthalten. Wegen $H_1 \cup H_2 = K_1 \cup K_2$ ist $K_i = H_1$ oder $K_i = H_2$.

Bezeichnung: Die Mengen H_1, H_2 heißen die beiden von g erzeugten *offenen Halbebenen* (auch: Seiten von g), und g heißt *Begrenzungsgerade* (auch: Randgerade) der Halbebenen. Die Vereinigung einer offenen Halbebene mit ihrer Begrenzungsgerade wird *abgeschlossenene Halbebene* genannt.

Symbolik: gP^+ bezeichnet die von g erzeugte Halbebene, die P enthält,
gP^- bezeichnet die von g erzeugte Halbebene, die P nicht enthält,
ABC^+ bezeichnet die von AB erzeugte Halbebene, die C enthält,
ABC^- bezeichnet die von AB erzeugte Halbebene, die C nicht enthält,

Satz 31 *(*PASCH*) Sind A, B, C nicht kollineare Punkte, g eine weder A noch B noch C enthaltende Gerade und P ein Punkt von g mit $Zw(APB)$, so gibt es in g einen Punkt Q mit $Zw(BQC)$ oder $Zw(AQC)$.*

Beweis: Nach Voraussetzung liegen A und B in verschiedenen von g erzeugten Halbebenen. C muss in einer dieser beiden Halbebenen liegen. Liegt C mit A in derselben Halbebene bezüglich g, so liegen C und B in verschiedenen Halbebenen, also gibt es einen Punkt $Q \in g$ mit $Zw(BQC)$; analoger Schluß im anderen Fall.

1.2.3 Anordnungsbeziehungen bei Translation, Richtungssinn

Satz 32 *Die Zwischenrelation ist invariant gegenüber Translation.*

Beweis: Die Einschränkung einer Translation auf drei kollineare Punkte kann durch eine Parallelprojektion oder die Hintereinanderausführung zweier Parallelprojektionen realistiert werden, mit Axiom (O3) folgt daraus die Behauptung.

Auf Spuren von Translationen bleibt nicht nur die Zwischenrelation dreier Punkte, sondern sogar die Ordnungsrelation der Punkte erhalten. Genauer:

Satz 33 *Ist $(g, <)$ eine orientierte Gerade und τ eine Translation in Richtung g, so gilt für beliebige Punkte $X, Y \in g$: Gilt $X < Y$, dann gilt auch $\tau(X) < \tau(Y)$.*

Beweis:
Es sei g eine Gerade und τ eine Translation in Richtung g (d.h., g ist eine Spur von τ.
1.: Es wird gezeigt, dass es ein Punktepaar $A, B \in g$ mit $A < B$ und $\tau(A) < \tau(b)$ gibt.
Es sei $X_0 \in g$ und Y_0 ein Punkt mit $Zw(X_0 Y_0 \tau(X_0))$, ferner X_1 ein Punkt $\notin g$ und τ_1 die Translation, die X_0 auf X_1 abbildet sowie $Y_1 = \tau_1(Y_0)$. Bezüglich Y_0Y_1 liegen X_0 und $\tau(X_0)$ auf verschiedenen Seiten, also liegen wegen $X_0X_1||Y_0Y_1$ auch X_1 und $\tau(X_1)$ auf verschiedenen Seiten von Y_0Y_1. Folglich existiert ein Punkt Z mit $Zw(X_1 Z \tau(X_0))$.
Parallelprojektion in Richtung g auf Y_0Y_1 liefert $Zw(Y_0 Z Y_1)$.
Parallelprojektion in Richtung $X_1\tau(X_0)$ auf g liefert $Zw(Y_0 \tau(X_0) \tau(Y_0))$.
Gilt $X_0 < Y_0$, so folgt $X_0 < Y_0 < \tau(X_0) < \tau(Y_0)$,
gilt $Y_0 < X_0$, so folgt $\tau(X_0) < Y_0 < X_0$ und $\tau(Y_0) < \tau(X_0) < Y_0$,
also existiert ein Paar A, B mit $A < B$ und $\tau(A) < \tau(B)$.
2.: Ist $P \in g$ beliebig, so gilt genau eine der Ungleichungsketten
$P < A < B$ oder $A < P < B$ oder $A < B < P$, also genau eine der drei Relationen $Zw(PAB)$ oder $Zw(APB)$ oder $Zw(ABP)$, daraus folgt, daß genau eine der Relationen $Zw(\tau(P)\tau(A)\tau(B))$ oder $Zw(\tau(A)\tau(P)\tau(B))$ oder $Zw(\tau(A)\tau(B)\tau(P))$ gilt, also genau eine der Ungleichungsketten
$\tau(P) < \tau(A) < \tau(B)$ oder $\tau(A) < \tau(P) < \tau(B)$ oder $\tau(A) < \tau(B) < \tau(P)$, woraus folgt, daß die zwischen A und P bestehende Ordnungsraltion erhalten bleibt.
3.: Analog schließt man nun unter Hinzuziehung des Punktes A, daß die Ordnungsbeziehung zwischen P und einem beliebigen Punkt $Q \in g$ bei τ erhalten bleibt. Damit ist der Satz bewiesen.

Für die Definition des Begriffes Richtungssinn ist es zweckmäßig, den Begriff der Translationsgleichheit zweier Punktmengen zu benutzen.

Definition: Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen *tranlationsgleich* genau dann, wenn es eine Translation τ gibt, bei der M_1 in M_2 übergeführt wird.

Da die Translationen eine Gruppe bilden, ist die Translationsgleichheit reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation auf dem System aller Punktmengen.

Beschränkt man sich auf die Menge aller Halbgeraden und berücksichtigt, dass die Bildmenge einer Halgeraden bei Translation wieder eine Halbgerade ist (folgt aus der Invarianz der Zwischenrelation bei Translation!), so liefert die Translationsgleichheit eine Klasseneinteilung der Menge aller Halbgeraden; die Klassen nennt man dann Richtungssinn. Man definiert also:

Definition: Ein *Richtungssinn* ist eine Äquialenzklasse von Halbgeraden bezüglich der Äquivalenzrelation „translationsgleich“.

Satz 34 *Die Menge derjenigen Halbgeraden, deren Trägergeraden eine feste Richtung bilden, zerfällt in genau zwei Richtungssinne.*

Die beiden im Satz genannten Richtungssinne nennt man *einander entgegengesetzt*.
Beweis: Es seien A, B zwei Punkte so, das die Gerade AB zur betrachteten Richtung gehört. Die Halbgeraden AB^+ und AB^- sind sicher nicht translationsgleich, also gibt es mindestens zwei Klassen. Ist PQ^+ eine beliebige Halbgerade mit einer zur betrachteten Richtung gehörenden Trägergeraden, so gibt es eine Translation, bei der P auf A abgebildet wird. Die Bildmenge von PQ^+ kann dann nur AB^+ oder AB^- sein, also gibt es höchstens zwei Klassen.

Weitere Folgerungen für den Begriff Richtungssinn:

1) Zwei kollineare Halbgeraden haben genau dann gleichen Richtungssinn, wenn eine von ihnen eine Teilmenge der anderen ist.

Beweis: Sei h Halbgerade, τ Translation in Richtung der Trägergeraden von h. Die Trägergerade von h sei so orientiert, daß $h = \{X : \ A \leq X\}$ ist. Nach Satz 33 wird $\tau(h) = \{Y : \ \tau(A) \leq Y\}$. Gilt $A < \tau(A)$, so wird $\tau(h) \subseteq h$, gilt $\tau(A) < A$, so wird $h \subseteq \tau(h)$. Umgekehrt schließt man aus $h \subseteq k$, daß die Translation, die den Anfangspunkt von h in den von k überführt, auch ganz h in ganz k überführt.

2) Ist τ eine Translation, so haben alle Halbgeraden der Form $X\tau(X)^+$ denselben Richtungssinn; dieser heißt *Richtungssinn der Translation* τ.

Beweis: Sind $X\tau(X)^+$ und $Y\tau(Y)^+$ zwei Halbgeraden und τ_1 die Translation mit $X \mapsto Y$, so folgt $\tau_1(X\tau(X)^+) = Y(\tau_1\tau(X))^+ = Y(\tau\tau_1(X))^+ = Y\tau(Y)^+$.

3) Ist τ eine Translation, so hat τ^{-1} den zum Richtungssinn von τ entgegengesetzten Richtungssinn.

Beweis: τ und τ^{-1} haben gleiche Richtung. Ist $\tau(A) = B$, so gehört AB^+ zum Richtungssinn von τ, und BA^+ gehört zum Richtungssin von τ^{-1}. Es sind aber AB^+ und BA^+ nicht in Enthaltenseinsrelation, also haben sie nach 1) unterschiedlichen Richtungssinn.

4) Haben τ_1, τ_2 denselben Richtungssinn, so hat auch $\tau_2 \circ \tau_1$ diesen Richtungssinn.

Beweis: Gilt $\tau_1(A) = B$ und $\tau_2(B) = C$, so sind AB^+ und BC^+ in Enthaltenseinsrelation, daraus ergibt sich (man orientiere die Trägergerade und betrachte die Ordnungsrelationen), daß auch AC^+ mit AB^+ in Enthaltenseinsrelation steht.

Die Anordnungsaxiome haben auch Konsequenzen, die nur die Inzidenz betreffen (z.B., daß jede Gerade aus unendlich vielen Punkten besteht). Eine andere Folgerung:

Satz 35 *Aus dem Axiom über die Zwischenrelation (Axiom 5) folgt das* Fano*-Axiom.*

Beweis:

Sei $AB \parallel CD$ und $AC \parallel BD$, ferner τ die Translation mit $A \mapsto B$ und $A' := \tau^{-1}(A)$. Mit Folgerung 3) ergibt sich $Zw(BAA')$, also liegen B und A' auf verschiedenen Seiten von AD. Ist τ_1 die Translation mit $\tau_1(A) = D$, so folgt $\tau_1(A') = \tau_1\tau^{-1}(A) = \tau^{-1}(D) = C$. Somit sind AD und $A'C$ Spuren von τ_1, also parallel, folglich liegen A' und C auf derselben Seite von AD, somit B und C auf verschiedenen Seiten von AD, so daß es einen Punkt $S \in AD$ mit $Zw(BSC)$ gibt. Die Parallelogrammdiagonalen schneiden sich also, obendrein liegt der Schnittpunkt noch zwischen den Eckpunkten.

Folgerung:
Ist M Mittelpunkt zu A und B, so gilt $Zw(AMB)$.

1.2.4 Orientierung

Definition: Eine *Semi-Ebene* (auch: Orientierungsfigur) ist die Vereinigungsmenge einer Halbgeraden mit einer der beiden offenen Halbebenen, die von der Trägergeraden der Halbebene erzeugt wird.

Der Anfangspunkt der Halbgeraden heißt auch Anfangspunkt der Semi-Ebene, die Halbgerade nennt man die *Randhalbgerade*.

Bezeichungen: $AB^+C^+, AB^-C^+, AB^+C^-, AB^-C^-$. Die beiden Semi-Ebenen AB^+C^+ und AB^-C^- nennt man einander *entgegengesetzt*.

Definition der Gleichorientierung zweier Semi-Ebenen:

a) Zwei Semi-Ebenen mit gemeinsamem Anfangspunkt sind gleichorientiert, wenn sie entweder gleich oder entgegengetzt sind oder wenn die Durchschnitte einer Geraden, die beide Randhalbgeraden schneidet (nicht im Anfangspunkt) mit den beiden Semi-Ebenen zwei Halbgeraden mit dem gleichen Richtungssinn sind.
b) Zwei Semi-Ebenen mit verschiedenen Anfangspunkten sind gleichorientiert, wenn sich bei der Translation, die einen Anfangspunkt in den anderen überführt, zwei im Sinne von a) gleichorientierte Semi-Ebenen ergeben.

Satz 36 *Die Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation, und es gibt dazu genau zwei Äquivalenzklassen.*

Die im Satz genannten Klassen nennt man die beiden *Orientierungsklassen*.

Zum Beweis: Man hat zunächst zu zeigen, daß die in der Definition genannte Eigenschaft hinsichtlich des Durchschnittes einer Geraden mit zwei Semi-Ebenen unabhängig von der Wahl der die Randhalbgeraden schneidenden Geraden ist, dabei arbeitet man zweckmäßig mit einer Kette von geeigneten Parallelprojektionen. Beim Beweise der Transitivität unterscheidet man zweckmäßig die Fälle, ob die drei beteiligten Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt in einer Halbebene untergebracht werden können oder nicht. Daß es nur zwei Klassen gibt, folgt dann leicht aus der Tatsache, daß es auf einer Geraden nur zwei Richtungssinne gibt. Für die Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen, siehe z.B. Böhm,J. u. a.: Geometrie I. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie (= Band 6 der Reihe „Mathematik für Lehrer"), 5.Aufl.Berlin 1985.

Bemerkung zur anschaulichen Deutung: Der Sachverhalt, daß eine Semi-Ebene zur einen oder anderen Orientierungsklasse gehört, entspricht dem anschaulichen Sachverhalt, daß die offene Halbebene rechts oder links von der Randhalbgeraden liegt, gesehen im Richtungssinn der Halbgeraden. Die Begriffe „rechts" und „links" selbst können nicht mathematisch gefaßt werden, sondern eben nur die Tatsache, daß es zwei Orientierungsklassen gibt.

1.2.5 Geometrische Anordnung und Anordnung des Koordinatenkörpers

Exkurs in die Algebra:

Ein Körper $\mathbb{K}$ ist angeordnet genau dann, wenn es in $\mathbb{K}$ eine Ordnungsrelation (also eine zweistellige transitive, irreflexive, konnnexe Relation) „$<$" gibt, so daß gilt:

(O1) $a < b \;\Rightarrow\; a + x < b + x$ für alle $a, b, x \in \mathbb{K}$,
(O2) $a < b \wedge 0 < x \;\Rightarrow\; ax < bx$ für alle $a, b, x \in \mathbb{K}$.

Ist nun $(\mathbb{K}, <)$ ein angeordneter Körper, so hat sein *Positivitätsbereich* $P := \{x \in \mathbb{K} :\ 0 < x\}$ offenbar folgende Eigenschaften:

(P1) $a, b \in P \;\Rightarrow\; a + b \in P$,
(P2) $a, b \in P \;\Rightarrow\; ab \in P$,
(P3) $a \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; a \in P \vee -a \in P \vee a = 0$.

Es gilt nun der leicht zu verifizierende

Hilfssatz *Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und P eine Teilmenge von $\mathbb{K}$ mit den Eigenschaften* (P1), (P2), (P3), *so wird durch die Festlegung $a < b \;:\Leftrightarrow\; b - a \in P$ der Körper $\mathbb{K}$ zu einem angeordneten Körper, und P ist der zugehörige Positivitätsbereich.*

Dies wird im folgenden ausgenutzt, um den Koordinatenkörper einer angeordneten affinen Inzidenzebene zu einem geordneten Körper zu machen.

Zurück zur Geometrie:

Satz 37 *Der Koordinatenkörper $\mathbb{K}$ einer papposschen affinen Inzidenzebene, für die das Anordnungsaxiom (5) gilt, kann über folgende Festlegung eines Positivitätsbereiches P zu einem angeordneten Körper* *gemacht werden: $a \in \mathbb{K}$ gehöre genau dann zu P, wenn bei einer a realisierenden Streckung das Zentrum nicht zwischen Original- und Bildpunkt liegt.*

Beweis:

1. Liegt bei einer Streckung für einen einzigen Punkt das Zentrum nicht zwischen ihm und seinem Bild, dann gilt das für alle Punkte; das folgt aus der Dilatationseigenschaft.

2. Gehören zwei Streckungen ζ_1, ζ_2 mit den Zentren Z_1, Z_2 zum gleichen Streckungsfaktor, dann gilt für die Translation τ mit $\tau(Z_1) = Z_2$ die Beziehung $\zeta_2 = \tau\zeta_1\tau^{-1}$. Gilt nun $Zw(Z_1P\zeta_1(P))$, so folgt wegen der Invarianz der Zwischenrelation bei Anwendung von τ die Beziehung $Zw(Z_2\tau(P)\tau\zeta_1(P))$, also $Zw(Z_2Q\tau\zeta_1\tau^{-1}(Q))$ bzw. $Zw(Z_2Q\zeta_2(Q))$, Zentrum, Original und Bild liegen also bei beiden Streckungen in analogen Zwischenbeziehungen.

3. Die Eigenschaft (P1) folgt aus der Definition der Addition von Körperelementen sowie Folgerung 4 aus der Definition des Begriffes Richtungssinn. (P2) folgt aus der Definition der Multiplikation und einer Betrachtung der Halbebenenzugehörigkeit von Original- und Bildpunkten bei Zusammensetzung zweier Streckungen, und (P3) folgt aus Axiom (5).

1.2.6 Anordnungsbeziehungen bei Affinitäten

Hilfssatz *Das Teilverhältnis $TV(XYZ)$ ist genau dann negativ, wenn $Zw(YXZ)$ gilt.*

Beweis: Es ist $\overrightarrow{XZ} = TV(XYZ) \cdot \overrightarrow{XY}$. Aus Satz 37 folgt daher: $TV(XYZ) > 0 \iff$ nicht $Zw(YXZ)$, und hieraus folgt die Behauptung.

Als Folgerung ergibt sich aus der Definition der Affinitäten als Kollineationen, bei denen das Teilverhältnis invariant ist:

Satz 38 *Bei Affinitäten ist die Zwischenrelation invariant.*

Folgerungen:

Die Bildmengen von Halbebenen, Halbgeraden, Strecken, Semi-Ebenen sind Halbebenen, Halbgeraden, Strecken, Semi-Ebenen.

Sind zwei Semi-Ebenen gleichorientiert, so auch ihre Bildmengen.

Daraus folgt, daß aus einer Orientierungsklasse bei Affinität wieder eine Orientierungsklasse wird. Da nur zwei Orientierungsklassen existieren, gibt es zwei Möglichkeiten: Beide Orientierungsklassen bleiben fest, oder sie werden vertauscht. Darauf beruht folgende Definition:

Eine Affinität heißt *gleichsinnig*, wenn sie jede der beiden Orientierungsklassen in sich selbst überführt, und sie heißt *ungleichsinnig*, wenn sie die beiden Orientierungsklassen vertauscht.

Beispiele:
Die Dilatationen sind gleichsinnig.
Eine axiale Affinität ist genau dann gleichsinnig, wenn Original- und Bildpunkt auf derselben Seite bezüglich der Achse liegen. Folglich sind Scherungen immer gleichsinnig, und Affinspiegelungen sind immer ungleichsinnig.

Die Gleich- oder Ungleichsinnigkeit einer Affinität kann auch rechnerisch charakterisiert werden:

Satz 39 *Eine Affinität ist genau dann gleichsinnig, wenn die Determinante ihrer Abbildungsmatrix positiv ist.*

(Beweis als Übungsaufgabe)

Ferner ist sofort zu sehen, dass die gleichsinnigen Affinitäten eine Gruppe bilden, die ungleichsinnigen dagegen nicht.

1.3 Kongruenz

In HILBERTS „Grundlagen der Geometrie“ wird die Kongruenz als Relation in der Menge der Strecken und Winkel axiomatisch eingeführt, also auf Inzidenz und Anordnung gegründet. Kongruenztransformationen werden dann als solche Kollineationen definiert, die Strecken auf dazu kongruente abbilden.

Dieser Weg kann auch in umgekehrter Richtung beschritten werden: Als Ausgangspunkt der Kongruenzlehre werden Axiome über Kongruenztransformationen (Bewegungen) formuliert, die Kongruenz wird dann unter Verwendung des Bewegungsbegriffes definiert. In dieser Weise wird hier vorgegangen. Das hat den Vorteil, daß die bereits zur Verfügung stehenden Sachverhalte, die mit Affinitäten im Zusammenhang stehen, ausgenutzt werden können. Außerdem entspricht dieses Vorgehen eher dem Aufbau der Geometrie in der Schule, bei dem ebenfalls die Kongruenz als ein aus dem Begriff der Kongruenztransformation hergeleiteter Begriff behandelt wird.

1.3.1 Kongruenztransformationen, Geradenspiegelungen, Senkrechtsein

Der Sinn des folgenden Axioms besteht darin, die Menge aller Affinitäten auf eine echte Untergruppe einzuschränken, um feinere Unterscheidungen bei geometrischen Figuren machen zu können. Es erweist sich als sinnvoll, von den den axialen Affinitäten und den Streckungen nur die involutorischen Abbildungen zuzulassen. Damit die Überführbarkeit von Figuren ineinander eine Äquivalenz wird, muß für die Menge der betrachteten Abbildungen die Gruppeneigenschaft gefordert werden.

Axiom 6 (Kongruenztransformationen)
In der Gruppe der Affinitäten existiert eine ausgezeichnete Untergruppe $\mathcal{B}$, deren Elemente *Kongruenztransformationen* gennant werden und die folgende Eigenschaften hat:

(1) Ist g eine Gerade, so existiert in $\mathcal{B}$ eine und nur eine axiale Affinität $\neq id$, die g als Achse hat. Ist P ein Punkt, so existiert in $\mathcal{B}$ eine und nur eine Affinität $\neq id$, die jede Gerade durch P auf sich abbildet. *(Starrheitsaxiom)*

(2) Zu zwei sich schneidenden Geraden g und h gibt es in der Gruppe $\mathcal{B}$ genau zwei axiale Affinitäten, bei denen g auf h und gleichzeitig h auf g abgebildet wird. *(Symmetrieaxiom)*

Statt Kongruenztransformation sagt man auch *Bewegung*.

Folgerung: Die in Axiom 6 (1) genannten Affinitäten sind notwendig involutorisch. Denn ist $\alpha \in \mathcal{B}$ eine solche Affinität, so ist wegen der Gruppeneigenschaft auch $\alpha^2 \in \mathcal{B}$, wegen (1) also $\alpha^2 = \alpha$ oder $\alpha^2 = id$. Ersteres hat zur Folge $\alpha = id.$, was nicht sein darf, also gilt die zweite Gleichung, d.h., α ist involutorisch. Eine Affinität, die alle Punkt einer Geraden festläßt, ist eine Affinspiegelung. Eine Affinität, die alle Geraden durch einen Punkt festläßt, hat mehr als drei Fixrichtungen, ist also nach Satz 29 eine Dilatation, und, da sie einen Fixpunkt hat, eine Streckung, als involutorische Streckung also eine Punktspiegelung. Die in Axiom 6 (1) genannten Affinitäten sind also Affinspiegelungen oder Punktspiegelungen. Ebenso sind die in Axiom 6 (2) genannten axialen Affinitäten involutorisch, also Affinspiegelungen.

Das Starrheitsaxiom besagt somit, daß die Gruppe der Kongruenztransformationen zwar axiale Affinitäten und Streckungen enthält, aber nur involutorische, und pro Achse gibt es in der Gruppe nur eine einzige nicht identische solche Abbildung – die Einzigkeit der Punktspiegelungen braucht nicht gefordert zu werden, sie wurde schon in **1.1.4.2** bewiesen.

Definition: Die in Axiom 6 (1) genannten Affinspiegelungen werden als *Geradenspiegelungen* bezeichnet; ist g die Achse, so spricht man von der *Geradenspiegelung an* g, und g heißt *Spiegelgerade*. Die Geradenspiegelung an der Geraden g wird mit σ_g bezeichnet.

Offenbar besteht eine Bijektion zwischen der Menge aller Geraden und der Menge aller Geradenspiegelungen: $g \longleftrightarrow \sigma_g$.

Die in Axiom 6 (2) genannten axialen Affinitäten sind ebenfalls Geradenspiegelungen, denn wegen der Einzigkeitsaussage im Starrheitsaxiom muß jede in $\mathcal{B}$ enthaltene axiale Affinität $\neq id$ eine Geradenspiegelung sein.

Hilfssatz 7 *Ist σ_g eine Geradenspiegelung und α eine beliebige Kongruenztransformation, so ist $\alpha\sigma_g\alpha^{-1}$ die Geradenspiegelung an der Geraden $\alpha(g)$.*

Beweis: Ist $X \in \alpha(g)$, so existiert ein $Y \in g$ mit $X = \alpha(Y)$, und es folgt $\alpha\sigma_g\alpha^{-1}(X) = \alpha\sigma_g(Y) = \alpha(Y) = X$, d.h. $\alpha(g)$ ist Fipunktgerade, $\alpha\sigma_g\alpha^{-1}$ ist axiale Affinität. Da in der Gruppe $\mathcal{B}$ jede von der identischen Abbildung verschiedene axiale Affinität eine Geradenspiegelung ist, folgt die Behauptung.

Insbesondere gilt, falls α eine Geradenspiegelung σ_h ist: $\sigma_{\sigma_h(g)} = \sigma_h\sigma_g\sigma_h$, also ist $\sigma_h(g) = k$ gleichbedeutend mit $\sigma_h\sigma_g\sigma_h = \sigma_k$ bzw. mit $\sigma_h\sigma_g = \sigma_k\sigma_h$, es besteht die Äquivalenz

$$\sigma_a(b) = c \iff \sigma_a\sigma_b = \sigma_c\sigma_a \quad \text{für beliebige Geraden } a, b, c$$

Definition des Senkrechtseins:

g, h seien Geraden. $g \perp h \quad :\Longleftrightarrow \quad \sigma_g(h) = h$ und $g \neq h$

Es ist also g genau dann senkrecht zu h, wenn h in der Affinitätsrichtung von σ_g liegt.

Sprechweise: Für $g \perp h$ sagt man: g ist *senkrecht zu* h, oder: g ist ein *Lot zu* (oder *auf*) h, oder: g ist zu h *orthogonal*.

Folgerungen:

1) Ist $g \neq h$, so gilt die Äquivalenz $\quad g \perp h \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_g\sigma_h = \sigma_h\sigma_g$

2) Aus $g \perp h$ folgt $h \perp g$

3) Gilt $g \perp h$, so ist $g \cap h$ ein Punkt.

4) Das Produkt zweier Geradenspiegelungen an zueinander senkrechten Geraden ist die Punktspiegelung am Schnittpunkt dieser Geraden; die Punktspiegelungen und die Translationen sind Kongruenztransformationen.

5) Ist $g \perp h$ und α eine beliebige Kongruenztransformation, so ist auch $\alpha(g) \perp \alpha(h)$ (Invarianz des Senkrechtseins gegen Kongruenztransformation).

6) Ist P ein Punkt, g eine Gerade, so existiert genau eine Gerade l mit $P \in l$ und $l \perp g$. (Existenz- und Einzigkeitssatz für Lote; l heißt *Lot von P auf g*).

7) Ist $g \perp h$, so folgt: Eine weitere Gerade ist genau dann senkrecht zu h, wenn sie parallel zu g ist.

Beweis der Folgerungen 1) bis 7):

Zu 1.: Aus $\sigma_g(h) = h$ folgt wegen der Bijektion $\sigma_x \leftrightarrow x$ die Gleichung $\sigma_{\sigma_g(h)} = \sigma_h$, dies bedeutet nach Hilfssatz 7: $\sigma_g\sigma_h\sigma_g = \sigma_h$, also $\sigma_g\sigma_h = \sigma_h\sigma_g$.

Zu 2.: Die Behauptung folgt sofort aus 1.)

Zu 3.: $g \perp h$ und $g \neq h$ hat zur Folge, daß h in der Affinitätsrichtung von σ_g liegt. Da σ_g involutorisch ist, kann es keine Scherung sein, die Affinitätsrichtung ist von der Achsenrichtung verschieden, h und g sind nicht parallel.

Zu 4.: Es gilt (Übungsaufgabe): Das Produkt zweier Affinspiegelungen ist genau dann eine Puntkspiegelung, wenn die Achse der einen in der Affinitätsrichtung der anderen liegt. Das ist aber bei senkrechten Achsen per definitionem der Fall. Da nach Satz 22 das Produkt zweier Punktspiegelungen eine Translation ist, sind die Translationen in der Gruppe $\mathcal{B}$ enthalten.

Zu 5.: Es sei $g \neq h$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}
g &\perp h \\
\sigma_g\sigma_h &= \sigma_h\sigma_g \\
\alpha\sigma_g\sigma_h\alpha^{-1} &= \alpha\sigma_h\sigma_g\alpha^{-1} \\
\alpha\sigma_g\alpha^{-1}\alpha\sigma_h\alpha^{-1} &= \alpha\sigma_h\alpha^{-1}\alpha\sigma_g\alpha^{-1} \\
\sigma_{\alpha(g)}\sigma_{\alpha(h)} &= \sigma_{\alpha(h)}\sigma_{\alpha(g)} \\
\alpha(g) &\perp \alpha(h)
\end{aligned}$$

Zu 6.: Existenz: Ist $P \notin g$, so liegt $P\sigma_g(P)$ in Affinitätsrichtung von σ_g, ist also ein Lot zu g. Ist $P \in g$, so wähle man einen Punkt $Q \notin g$ und wende auf die Gerade $Q\sigma_g(Q)$ die Translation an, die $Q\sigma_g(G) \cap g$ auf P abbildet und erhält ein Lot.

Einzigkeit: Sie folgt aus dem Starrheitsaxiom; jedes Lot zu g durch $X \in g$ liegt in Affinitätsrichtung der Geradenspiegelung an g.

Zu 7.: Alle Senkrechten zu h liegen in der Affinitätsrichtung der Geradenspiegelung an h.

Es wird jetzt die Menge derjenigen Kongruenztransformationen untersucht, die einen festen Punkt P und gleichzeitig eine fest gewählte P enthaltende Gerade g in sich überführen.

Es sei l das Lot zu g durch P. Nach Folgerung 4 aus der Definition des Senkrechtseins folgt: $\sigma_g\sigma_l = \sigma_l\sigma_g = \sigma_P$. Aus Axiom 6 (2) folgt: Es gibt Geraden w_1, w_2, die P enthalten, bezüglich derer l und g spiegelbildlich liegen, d.h., es ist $\sigma_{w_i}(g) = l$ bzw. $\sigma_{w_i}\sigma_g = \sigma_l\sigma_{w_i}$ für $i = 1, 2$.

Erste Behauptung: Die Geraden w_1, w_2 sind senkrecht.
Beweis: Für $i = 1, 2$ gilt: Aus $\sigma_P(g) = g$ folgt $\sigma_{w_i}\sigma_P(g) = l$ und $\sigma_{w_i}\sigma_P(l) = g$, also vertauscht $\sigma_{w_i}\sigma_P$ die Geraden g und l. Auf Grund von Axiom 6 (2) geht das nur mit $\sigma_{w_i}\sigma_P \in \{\sigma_{w_1}, \sigma_{w_2}\}$. Es ist also $\sigma_{w_1}\sigma_P = \sigma_{w_2}$ und $\sigma_{w_1}\sigma_{w_2} = \sigma_P$. Wegen $\sigma_P = \sigma_P^{-1}$ ist dann $\sigma_{w_1}\sigma_{w_2} = \sigma_{w_2}\sigma_{w_1}$, also $w_1 \perp w_2$.

Zweite Behauptung: $\sigma_g(w_1) = w_2$, d.h., w_1, w_2 liegen spiegelbildlich zu g.
Die Behauptung ist gleichbedeutend mit $\sigma_{\sigma_g(w_1)} = \sigma_{w_2}$ bzw. $\sigma_g\sigma_{w_1}\sigma_g = \sigma_{w_2}$ oder auch $\sigma_g\sigma_{w_1} = \sigma_{w_2}\sigma_g$. Es ist aber $\sigma_g\sigma_{w_1} = \sigma_P\sigma_l\sigma_{w_1} = \sigma_P\sigma_{w_1}\sigma_g = \sigma_{w_2}\sigma_g$, w.z.z.w.

Nun sei φ eine Kongruenztransformation mit $\varphi(P) = P$, $\varphi(g) = g$. Die Geraden l, w_1, w_2 seien wie oben definiert, es folgt $\varphi(l) = l$. Es sei $v_i := \varphi(w_i)$ für $i = 1, 2$. Nach Hilfssatz 7 wird

$$\sigma_{v_i} = \varphi\sigma_{w_i}\varphi^{-1}.$$

Anwendung auf g ergibt

$$\sigma_{v_i}(g) = \varphi\sigma_{w_i}\varphi^{-1}(g) = \varphi\sigma_{w_i}(g) = \varphi(l) = l,$$

wegen Axiom 6 (2) bedeutet das $\varphi(w_i) \in \{w_1, w_2\}$.
Fall 1: $\varphi(w_1) = w_1$, $\varphi(w_2) = w_2$.
Es hat φ die Fixrichtungen von g, l, w_1, w_2, ist also nach Satz 29 eine Dilatation, und als Kongruenztransformation kann das nur eine Punktspiegelung, also σ_P sein, oder $\varphi = id$.
Fall 2: $\varphi(w_1) = w_2$, $\varphi(w_2) = w_1$.
Anwendung von σ_g liefert $\sigma_g\varphi(w_1) = \sigma_g(w_2) = w_1$, also hat $\sigma_g\varphi$ mindestens die Fixrichtungen von g, l und w_1, ist also entweder die identische Abbildung oder σ_P, d.h., es ist $\varphi = \sigma_g$ oder $\varphi = \sigma_l$.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 40 *Zu einem Punkt P und einer diesen Punkt enthaltenden Geraden g gibt es genau vier Kongruenztransformationen, die das System (P, g) auf sich abbilden. Es sind dies: Die identische Abbildung, die Punktspiegelung an P, die Geradenspiegelung an g und die Geradenspiegelung am Lot zu g durch P.*

Bemerkung: Bis zu dieser Stelle hat im Abschnitt **1.3** die Anordnung keine Rolle gespielt, alle Sachverhalte gelten unabhängig von den Anordnungsaxiomen (allerdings muß das FANO-Axiom gelten, weil wesentlicher Gebrauch von involutorischen Affinitäten gemacht wurde). Im folgenden Satz wird der Begriff der Semi-Ebene verwendet, also werden die Anordnungsaxiome vorausgesetzt.

Satz 41 *Zu zwei Semi-Ebenen F_1, F_2 existiert genau eine Kongruenztransformation, bei der F_1 auf F_2 abgebildet wird.*

Beweis:
Existenz: Durch Hintereinanderausführung einer Translation und maximal zweier Geradenspiegelungen kann F_1 auf F_2 abgebildet werden.
Einzigkeit: Hat man zwei Kongruenztransformationen α_1, α_2 mit $\alpha_i(F_1) = F_2$ für $i = 1, 2$, so ist $\alpha_2^{-1}\alpha_1(F_1) = F_1$. Eine Kongruenztransformation, die die Semi-Ebene F_1 auf sich selbst abbildet, führt ihren Anfangspunkt und die Trägergerade ihrer Randhalbgeraden in sich selbst über, ist also nach Satz 40 eine der dort genannten vier Kongruenztransformationen. Von denen bildet aber nur die identische Abbildung F_1 auf sich ab, bei den drei anderen werden die Randhalbgerade oder die Halbebene geändert. Also ist $\alpha_2^{-1}\alpha_1 = id$ bzw. $\alpha_2 = \alpha_1$.

1.3.2 Kongruenz

Definition: Zwei geometrische Figuren (also Punktmengen oder Systeme von Punktmengen) F und F' werden *kongruent* genau dann genannt, wenn es ein Kongruenztransformation $\varphi \in \mathcal{B}$ gibt, so daß $\varphi(F) = F'$ gilt.
Bezeichnung: $F \cong F'$.

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation, denn $\mathcal{B}$ ist eine Gruppe. Es können nun die üblichen Sätze der Kongruenzlehre hergeleitet werden, z.B.:

Satz 42 *Ist $\overline{AB}$ eine Strecke und PQ^+ eine Halbgerade, so existiert genau ein Punkt $X \in PQ^+$ mit $\overline{PX} \cong \overline{AB}$. (Streckenabtragung)*

Beweis: Es gibt eine Kongruenztransformation, die AB^+ auf PQ^+ abbildet, das Bild des Punktes B bei dieser Kongruenztransformation ist ein Punkt X mit der genannten Eigenschaft. Die Einzigkeit ergibt sich aus Satz 40.

An dieser Stelle kann Dreiecksgeometrie betrieben werden, insbesondere können die sogenannten Dreieckskongruenzsätze bewiesen werden.

Als *Dreieck* definiert man für drei nicht kollineare Punkte A, B, C entweder die Dreiermenge $\{A, B, C\}$ (Eckpunktmenge) oder die Vereinigung der durch die drei Punkte gegebenen Strecken $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ (Dreieckslinie) oder aber den Durchschnitt der abgeschlossenen Halbebenen $ABC^+ \cap BCA^+ \cap CAB^+$ (Dreiecksfläche). Die Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ heißen *Seiten* des Dreiecks.

Für den Winkelbegriff in der Dreiecksgeometrie genügt es zunächst, unter einem *Winkel* einfach die Vereinigungsmenge zweier nicht kollinearer Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt zu verstehen, also für zwei nicht kollineare Halbgeraden h, k zu definieren:

$$\sphericalangle\,(h,k) := h \cup k$$

Man beachte, daß die Reihenfolge der Halbgeraden keine Rolle spielt, diese ist bei einem anderen Winkelbegriff von Bedeutung (siehe Abschnitt 2 unter Drehung), auch der Begriff des gestreckten bzw. Nullwinkels ist hier nicht erfaßt. Die Halbgeraden können auch durch Punkte gegeben sein. Statt $\sphericalangle\,(AP^+, AQ^+)$ schreibt man kurz $\sphericalangle\,PAQ$, es ist dann $\sphericalangle\,PAQ = \sphericalangle\,QAP$. Der Punkt A heißt *Scheitel*, die beiden Halbgeraden heißen *Schenkel* des Winkels.

Die in den sog. Dreieckskongruenzsätzen formulierten Aussagen bestehen immer darin, daß aus i.a. drei einzelnen Kongruenzrelationen für „Stücke“ (also Seiten und Winkel) zweier Dreiecke auf eine einzige Kongruenz geschlossen wird, die dann zwischen den Eckpunktmengen der beiden Dreiecke besteht. Bei der Beweisführung hat man also im allgemeinen drei Kongruenztransformationen zur Verfügung, aus denen man eine einzige geeignete konstruiert oder auswählt. Beispiel:

Satz 43 *Sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte, ebenso A', B', C', so folgt aus $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\sphericalangle\,BAC \cong \sphericalangle\,B'A'C'$, daß $\{A, B, C\} \cong \{A', B', C'\}$ ist. (Kongruenzsatz „sws“ für Dreiecke)*

Beweis: Wegen $\sphericalangle\,BAC \cong \sphericalangle\,B'A'C'$ gibt es eine Kongruenztransformation α, die $\{AB^+, AC^+\}$ auf $\{A'B'^+, A'C'^+\}$ abbildet. Wegen des Symmetrieaxioms kann o.B.d.A angenommen werden, daß dabei AB^+ auf $A'B'^+$ abgebildet wird und AC^+ auf $A'C'^+$; denn wenn es nicht der Fall ist, setze man α mit der nach Axiom 6(2) existierenden Geradenspiegelung zusammen, die die Geraden $A'B'$ und $A'C'$ vertauscht, und wenn danach die Halbgeradenzuordnung noch nicht die gewünschte ist, setze man noch mit der Punktspiegelung an A' zusammen. Wegen Satz 42 muß bei α der Punkt B auf B' und C auf C' abgebildet werden, so daß die Kongruenztransformation α insgesamt das Tripel (A, B, C) auf das Tripel (A', B', C') abbildet, also erst recht die Menge $\{A, B, C\}$ auf$\{A', B', C'\}$.

1.4 Messung

In diesem Abschnitt werden Zusammenhänge zu den reellen Zahlen hergestellt, die man unter dem Begriff Messung zusammenfassen kann. Es werden Strecken, Winkel und Flächen gemessen. Die Beweise werden hier nicht ausgeführt und sind der Literatur zu entnehmen (siehe z.B. Mathematik für Lehrer, Band 6)

1.4.1 Strecken- und Winkelmessung

Definition: Ein *Längenfunktional* ist eine Abbildung l von der Menge aller Strecken in die Menge der positiven Zahlen von $\mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Aus $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ folgt $l(\overline{AB}) = l(\overline{CD})$ (Invarianz gegen Kongruenztransformation)

(2) Aus $Zw(ABC)$ folgt $l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) = l(\overline{AC})$ (Additivität)

(3) Es gibt eine Strecke $\overline{PQ}$ mit $l(\overline{PQ}) = 1$ (Normiertheit)

Bezeichnung: $l(\overline{AB})$ heißt *Länge* der Strecke $\overline{AB}$.

Definition: Ein (elementares) *Winkelfunktional* ist eine Abbildung l von der Menge aller Winkel (im Sinne der Definition aus **1.3.2**) in die Menge der positiven Zahlen von $\mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Aus $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$ folgt $w(\sphericalangle ABC) = w(\sphericalangle PQR)$ (Invarianz gegen Kongruenztransformation)

(2) Aus $Zw(ABC)$ folgt für jeden Punkt $S \notin AB$ die Gleichung
$w(\sphericalangle(SA^+, SB^+)) + w(\sphericalangle(SB^+, SC^+)) = w(\sphericalangle(SA^+, SC^+))$ (Additivität)

Die Existenz solcher Funktionale kann aus den Axiomen (1) bis (6) nicht hergeleitet werden. Dazu bedarf es eines Axioms, das das „Ausschöpfen" einer Strecke durch eine andere ermöglicht:

Axiom 7 (Archimedisches Axiom)
Zu zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{XY}$ existieren eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und $n+1$ Punkte $X_0, X_1, \ldots, X_n$ mit

(1) $\overline{X_iX_{i+1}} \cong \overline{AB}$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

(2) $X_0 = X$ und $X_i \in XY^+$ für $i = 1, \ldots, n$,

(3) $Zw(X_{i-1}X_iX_{i+1})$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

(4) $Zw(XYX_n)$, aber nicht $Zw(XYX_{n-1})$.

Mit diesem Axiom kann folgender Satz bewiesen werden (für einen Beweis sehe man in der Literatur nach):

Satz 44 *Zu einer vorgegebenen Strecke $\overline{PQ}$ gibt es genau ein Längenfunktional l mit $l(\overline{PQ}) = 1$, und zu einer vorgegebenen positiven Zahl $r \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein Winkelfunktional w mit $w(\sphericalangle ABC) = r$ für $AB \perp BC$.*

Definiert man eine *Kreislinie* mit Mittelpunkt M und Radius r, wobei M ein Punkt, r eine positive Zahl $\in \mathbb{K}$ ist, als Punktmenge $\{X \in \mathcal{P} : \quad l(\overline{MX}) = r\}$, so ist von der Anschauung her wünschenswert, daß für $l(\overline{AB}) < 2r$ die Kreislinien mit Mittelpunkten A, B und Radien r gemeinsame Punkte haben. Dies kann mit den bisherigen Axiomen nicht bewiesen werden, es gibt Ebenen, in denen solche Kreislinien keine Schnittpunkt haben. Da man solche Punkte mittels Strecken- (oder Intervall-) -schachtelung charakterisieren kann, ist es zweckmäßig, noch folgendes Axiom zu stellen:

Axiom 8 (Vollständigkeitsaxiom)
Jede Streckenschachtelung hat einen inneren Punkt.

Dabei versteht man unter Streckenschachtelung eine Folge $s_1, s_2, \ldots$ von Strecken s_i mit $s_{i+1} \subseteq s_i$ und $\lim_{n\to\infty} l(s_n) = 0$, und ein innerer Punkt der Streckenschachtelung ist ein Punkt P mit $P \in s_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Aus Axiom 7 folgt, daß der Körper $\mathbb{K}$ archimedisch angeordnet ist (d.h. zu jedem $x \in \mathbb{K}$ existiert eine natürliche Zahl n mit $n \cdot 1 > x$), und aus Axiom 8 folgt, daß er vollständig ist (d.h., jede CAUCHYfolge hat einen Grenzwert). Der einzige Körper mit diesen Eigenschaften ist aber – bis auf Isomorphie – der Körper der reellen Zahlen. Damit ist die hier behandelte Ebene zur

reellen euklidischen Ebene

geworden. Die Axiome 1 bis 8 legen die Struktur der Ebene bis auf Isomorphie eindeutig fest. Der Koordinatenkörper ist mit Notwendigkeit der Körper der reellen Zahlen.

1.4.2 Flächenmessung

Es soll eine Abbildung von Punktmengen in die positiven reellen Zahlen eingeführt werden, die wie die Streckenmessung gegen Kongruenztransformation invariant ist und additiv, wobei das Aneinanderlegen von Strecken im wesentlichen durch Vereinigung der Punktmengen ersetzt werden müßte. Für beliebige Mengen ist das nicht in sinnvoller Weise möglich, so daß man sich zunächst auf spezielle Punktmengen beschränkt, z.B. auf *Polygone*. Dazu einige Begriffsbildungen:

Konvexes Polygon:	Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbebenen, der nicht Teilmenge einer Geraden ist, der aber auch keine Halbgerade enthält.
Eckpunkt eines konvexens Polygons:	Punkt des Polygons, der Schnittpunkt zweier Randgeraden von erzeugenden Halbebenen ist.
Seite eines konvexen Polygons:	Durchschnitt einer Randgeraden einer erzeugenden Halbebene mit dem Polygon. Die Seiten sind Strecken, und die Ecken sind Endpunkte der Seiten.
Randpunkte, innere Punkte:	Die Punkte der Seiten sind Randpunkte des konvexen Polygons, alle anderen Punkte des Poygons sind innere Punkte.
(Allgemeines) Polygon:	Vereinigungsmenge endlich vieler konvexer Polygone. (Evtl. wird auch die Forderung gestellt, zusammenhängend zu sein.)
Elementargeometrische Summe:	P, Q, R seien Polygone. $R = P + Q \quad :\Longleftrightarrow \quad P \cap Q$ enthält keine inneren Punkte von P oder Q, und es ist $R = P \cup Q$.

Mit diesen Begriffsbildungen wird der Begriff des elementaren Inhaltsfunktionals definiert (elementar deshalb, weil es sich nur auf Polygone bezieht):

Definition: Ein (elementares) *Inhaltsfunktional* ist eine Abbildung Fl von der Menge aller Polygone in die Menge der positiven rellen Zahlen, die folgende Eigenschaften hat:

(1) Aus $P \cong Q$ folgt $Fl(P) = Fl(Q)$ (Invarianz gegen Kongruenztransformation)

(2) Aus $R = P + Q$ folgt $Fl(R) = Fl(P) + Fl(Q)$ (Additivität)

(3) Ist Q ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, so ist $Fl(Q) = 1$. (Normiertheit)

(Der Begriff Quadrat wird in üblicher Weise definiert: Ein nichtleerer Durchschnitt von vier Halbebenen, deren Randgeraden $g_1, \ldots, g_4$ in der Relation $g_1 \perp g_2 \perp g_3 \perp g_4$, so daß die vier Seiten des Durchschnittpolygons gleiche Länge haben.)

Bezeichnung: $Fl(P)$ heißt *Flächeninhalt* von P, auch *Inhalt* von P. Ohne Beweis (siehe Literatur) sei folgender Satz mitgeteilt:

Satz 45 *Nach Festlegung eines Längenfunktionals gibt es genau ein (elementares) Inhaltsfunktional.*

Es ist nicht schwierig, aus dieser Definition und diesem Satz die bekannten Formeln für den Flächeninhalt von Polygonen herzuleiten.

Für allgemeinere Punktmengen kann ein Flächeninhalt mittels „Annäherung durch Polygone" definiert werden. Das geht nur bei einer bestimmten Klasse von Punktmengen, den sog. *quadrierbaren Punktmengen*. Eine Punktmenge M heißt quadrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ Polygone P und Q gibt, so daß

$$P \subseteq M \subseteq Q \quad \text{und } Fl(Q) - Fl(P) < \varepsilon$$

gilt. Alle Polygone sind quadrierbare Punktmengen, aber es gibt viele weitere quadrierbare Punktmengen, die nicht Polygone sind (z.B. Kreisflächen).

Auch für quadrierbare Punktmengen kann der Begriff der elementargeometrischen Summe definiert werden, und unter einem Inhaltsfunktional versteht man eine zum elementaren Inhaltsfunktional analoge Abbildung, nur daß statt der Menge der Polygone die Menge der quadrierbaren Punktmengen als Originalbereich genommen wird. Der Existenz- und Einzigkeitssatz für ein solches Funktional gilt analog zu Satz 45.

Für Polygone kann der Flächeninhaltsbegriff auch ohne Verwendung des Zahlbegriffes eingeführt werden. Man definiert für zwei Polygone P und Q den Begriff der *Zerlegungsgleichheit*:

$P \stackrel{z}{=} Q \quad \Longleftrightarrow \quad$ Es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Polygone $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ mit $P = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i$ und $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$ und $P_i \cong Q_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Dies ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Polygone, und aus der Zerlegungsgleichheit zweier Polygone folgt offenbar auch deren Inhaltsgleichheit. Interessanterweise gilt hiervon auch die Umkehrung:

Satz von BOLYAI-GERWIEN: *Zwei Polygone, die inhaltsgleich sind, sind auch zerlegungsgleich.*

Der Flächeninhalt für Polygone kann somit als Äquivalenzklasse bezüglich der Zerlegungsgleichheit definiert werden. Ein analoger Sachverhalt gilt dann im dreidimensionalen Raum nicht mehr.

1.5 Zur Geometrie des 3-dimensionalen euklidischen Raumes

1.5.1 Inzidenz

Der dreidimensionale euklidische Raum wird definiert als Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$, wobei

$\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge ist, deren Elemente *Punkte* heißen,

$\mathcal{G}$ ein System von Teilmengen von $\mathcal{P}$ ist, dessen Elemente *Geraden* heißen,

$\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen von $\mathcal{P}$ ist, dessen Elemente *Ebenen* heißen,

derart, daß die in den folgenden Abschnitten **1.5.1** bis **1.5.4** genannten Axiome gelten.

Inzidenzaxiome:

(1) Nichttrivialität: Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte, jede Ebene enthält mindestens drei nicht zu einer Geraden gehörende Punkte, und es gibt vier nicht zu einer Ebene gehörende Punkte.

(2) Verbindbarkeit: Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die die beiden Punkte enthält. Zu drei nicht zu einer Geraden gehörenden Punkte gibt es genau eine Ebene, die die drei Punkte enthält.

(3) Durchschnitte: Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine Gerade oder leer, oder die Ebenen sind gleich. Der Durchschnitt einer Geraden mit einer Ebene ist ein Punkt oder leer, oder die Gerade ist in der Ebene enthalten.

Die Begriffe kollinear, kopunktal werden wie in **1.1** verwendet. Eine Menge heißt *komplanar*, wenn sie in einer Ebene enthalten ist.

Definition der Parallelität für Geraden:

$$g \parallel h \quad :\Longleftrightarrow \quad g, h \text{ sind komplanar und es gilt:} \quad g \cap h = \emptyset \text{ oder } g = h.$$

(4) Parallelenaxiom: Ist P ein Punkt, g eine Gerade, so gibt es genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $h \parallel g$.

Die Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{G}$.

Definition weiterer Parallelitäten:
Zwei Ebenen heißen genau dann parallel, wenn sie leeren Durchschnitt haben oder gleich sind. Folgerung: Die Parallelität von Ebenen ist eine Äquivalenzrelation.
Eine Gerade g und eine Ebene heißen parallel genau dann, wenn in der Ebene eine zu g parallele Gerade enthalten ist.

Folgerungen aus den Axiomen:

Zu zwei sich in genau einem Punkt schneidenden Geraden gibt es genau eine Ebene, die die beiden Geraden enthält.

Zu zwei Geraden, die nicht komplanar sind (also sich weder schneiden noch parallel sind), gibt es ein Paar paralleler Ebenen, so daß in jeder der Ebenen eine der Geraden enthalten ist. Zwei solche Geraden heißen *windschief*.

Der Satz von DESARGUES ist im Raume beweisbar: Im Falle, daß die drei im Satz vorkommenden kopunktalen Geraden nicht komplanar sind, schneide man sie mit zwei parallelen Ebenen, und der ebene Fall ergibt sich hieraus durch Parallelprojektion.

Translationen, Dilatationen, Affinitäten sind wie in der ebenen Geometrie definiert. Sie führen Ebenen in Ebenen über.

1.5.2 Anordnung

Die Anordnungsaxiome sind dieselben wie in der ebenen Geometrie (vgl. Abschnitt **1.2**).

Wichtige Begriffe sind die des Halbraumes, des Semi-Raumes und der Orientierung: Ist ε eine Ebene, so ist für die Punkte der Menge $\mathcal{P} \setminus \varepsilon$ eine Äquivalenzrelation dadurch gegeben, daß man zwei Punkte als äquivalent definiert, wenn zwischen ihnen kein Punkt von ε existiert. Es ergeben sich dann genau zwei Äquivalenzklassen, die beiden von ε erzeugten *offenen Halbräume*. Ein *Semi-Raum* ist die Vereinigungsmenge aus einem offenen Halbraum H_1, einer offenen Halbebene H_2 und einer Halbgeraden H_3, wobei H_3 in der Begrenzung von H_2 und H_2 in der Begrenzung von H_3 liegt. Man kann in Analogie zum Vorgehen in der Ebene eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Semi-Räume definieren, so daß zwei Klassen entstehen, die dann *Orientierungsklassen* genannt werden.

1.5.3 Kongruenz

Axiom:
Es wird gefordert, daß eine Gruppe von *Kongruenztransformation* existiert; diese ist eine Gruppe von Affinitäten mit der Eigenschaft, daß es zu zwei beliebigen Semi-Räumen genau eine Transformation in der Gruppe gibt, die die eine auf die andere abbildet und daß es zu zwei Ebenen eine Tranformation in der Gruppe gibt, die die beiden Ebenen vertauscht.

Besonders wichtig sind hierbei die Kongruenztransformationen, bei denen es jeweils einen Semi-Raum gibt, dessen begrenzende Ebene aus lauter Fixpunkten besteht und dessen beide offenene Halbräume bei der Transformation vertauscht werden. Zu jeder Ebene ε als Fixpunktebene gibt es genau eine solche Transformation, sie wird *Ebenenspiegelung an* ε genannt und mit σ_ε bezeichnet.

Definition des Senkrechtseins:

Ebene - Ebene: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \;:\Longleftrightarrow\; \sigma_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

Ebene - Gerade: $g \perp \varepsilon \;:\Longleftrightarrow\; \sigma_\varepsilon(g) = g$ und $g \cap \varepsilon \neq g$.

Gerade - Gerade: $g \perp h \;:\Longleftrightarrow\;$ es gibt eine Ebene ε mit $g \perp \varepsilon$ und $h \subset \varepsilon$.

Die üblichen Existenz- und Einzigkeitssätze sind nun herleitbar. Ferner gilt für eine Ebene ε und eine Gerade g:

$g \perp \varepsilon \quad \Longleftrightarrow$ ε enthält zwei nicht parallele Geraden, die zu g senkrecht sind.
$\qquad\quad \Longleftrightarrow$ g ist zu allen Geraden von ε senkrecht.

Zu zwei windschiefen Geraden g, h gibt es genau eine Gerade l, die g und h schneidet und die zu g und zu h senkrecht ist (gemeinsames Lot zweier windschiefer Geraden).

1.5.4 Messung

Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom lauten genau wie in der Geometrie der Ebene (vgl. Abschnitt **1.4**), und die Flächen- und Winkelmessung geschieht wie in der Ebene, da die betreffenden Figuren (Polygone, quadrierbare ebene Punktmengen, Winkel) ebene Punktmengen sind.

Für die Volumenmessung werden zunächst Polyeder betrachtet, dann werden quadrierbare Mengen mit Hilfe von Poledern erklärt, so wie in der Ebene mit Hilfe von Polygonen.

Ein *konvexes Polyeder* ist ein Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume, der nicht komplanar ist, aber keine Halbgerade enthält.

Ein *Polyeder* ist Vereinigungsmenge endlich vieler konvexer Polyeder.

Elementargeometrische Summe R zweier Polyeder P und Q:
$P + Q = R$ bedeutet, daß $P \cap Q$ keine inneren Punkte von P oder Q enthält und daß $R = P \cup Q$ ist.

Ein *elementares Inhaltsfunktional* ist eine Abbildung vol von der Menge aller Polyeder in die Menge der positiven reellen Zahlen, die additiv, invariant gegen Kongruenztransformation und normiert ist (vgl **1.4.2**). Ihre Existenz und Einzigkeit (nach Festlegung einer Längenmessung) kann bewiesen werden, und es können die bekannten Volumenformeln für Quader, Pyramiden usw. hergeleitet werden.

Eine Punktmenge M nennt man *quadrierbar*, wenn es zu jedem positiven ε Polyeder P und Q gibt, so daß $P \subseteq M \subseteq Q$ und $vol(Q) - vol(P) < \varepsilon$ gilt. Solchen Punktmengen kann man in offensichtlicher Weise ein Volumen als Grenzwert der um- und einbeschriebenen Polyeder zuordnen.

Der Begriff der Zerlegungsgleichheit für Polyeder kann wie der für Polygone in **1.4.2** definiert werden. Zerlegungsgleiche Polyeder haben gleiches Volumen. Hiervon gilt aber – im Gegensatz zur ebenen Geometrie – die Umkehrung nicht; z.B. sind ein regelmäßiges Tetraeder und ein dazu volumengleicher Würfel nicht zerlegungsgleich (M.Dehn im Jahre 1900).

2 Transformationen in der Elementargeometrie

2.1 Transformationen in der Ebene

2.1.1 Kongruenztransformationen

Es soll ein Überblick über alle möglichen Typen von Kongruenztransformation der Ebene hergestellt werden.
Erste Einteilung: Gleich- und ungleichsinnige Transormationen.
Bereits behandelte Beispiele: Translationen und Punktspiegelungen für gleichsinnige, Geradenspiegelungen für ungleichsinnige Transformationen. Die gleichsinnigen Transformationen bilden eine Untergruppe.

Satz 1 *Jede Kongruenztransformation ist als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellbar.*

Beweis: Nach **1.3.1**, Satz 41 aus genügt es, einen beliebigen Semi-Raum F durch Geradenspiegelungen in einen beliebigen anderen Semi-Raum F' überzuführen. Mittels einer ersten Geradenspiegelung kann der Anfangspunkt der Halbgeraden von F auf den von F' abgebildet werden, mit einer zweiten Geradenspiegelung werden die Halbgeraden, die nunmehr gleichen Anfangspunkt haben, aufeinander abegebildet, und eine dritte Geradenspiegelung stellt die richtige Zuordnung der offenen Halbebenen her. Unter Umständen sind einige der drei genannten Spiegelungen nicht erforderlich.

Satz 2 (Dreispiegelungssatz) *Das Produkt dreier Geradenspiegelungen an drei kopunktalen Geraden ist wieder eine Geradenspiegelung; ihre Achse enthält den gemeinsamen Punkt der drei Spiegelgeraden.*

Beweis:

Seien a, b, c Geraden und S der Punkt mit $a \cap b \cap c = \{S\}$. Sei ferner A ei

Fall 1: $A' \notin c$.

Es sei $A'' := \sigma_c(A')$, es sind dann A, A', A'' drei nicht kollineare Punkte, und b ist die Mittelsenkrechte zu A, A' sowie c die Mittelsenkrechte zu A', A''. Nach dem Satz über die Mittelsenkrechten eines Dreiecks (s. Übungen) geht die Mittelsenkrechte d zu A'', A ebenfalls durch S, und die Kongruenztransformation $\sigma_d\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ hat die Fixpunkte S und A. Außerdem ist sie als Produkt von geradzahlig vielen Geradenspiegelungen gleichsinnig, führt also die Semi-Ebene SP^+X^+ in SP^+X^+ über und kann somit nur die identische Abbildung sein. Hieraus folgt $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_d$.

Fall 2: $A' \in c$.

In diesem Fall hat $\sigma_b\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ die Fixpunkte S und P, ist also nach dem gleichen Schluss wie in Fall 1 gleich der identischen Abbildung, d.h., $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_b$.

Gleichsinnige Kongruenztransformationen:

Jede gleichsinnige Kongruenztransformation ist Produkt zweier Geradenspiegelungen, also in der Form $\sigma_g\sigma_h$ darstellbar.

Fall 1: $g \parallel h$.

Sei l ein gemeinsames Lot von g und h und $P := g \cap l$, $Q := h \cap l$. Dann wird $\sigma_g\sigma_h = \sigma_g\sigma_l\sigma_l\sigma_k = \sigma_P\sigma_Q$, und dies ist nach **1.1.4.2**, Satz 22 eine Translation in Richtung l. Somit ist das Produkt zweier Geradenspiegelungen an parallelen Geraden eine Translation in Richtung senkrecht zu den Geraden; die Länge des Translationsvektors ist gleich dem doppelten Abstand der Spiegelgeraden.

Fall 2: $g \cap h = \{S\}$.

Es hat $\sigma_h\sigma_h$ den Fixpunkt S.

Definition: Eine gleichsinnige Kongruenztransformation mit einem Fixpunkt S heißt Drehung mit dem Zentrum S (oder: Drehung um S).

Somit gilt:

Satz 3 *Das Produkt zweier Geradenspiegelungen an* $\left\{\begin{array}{c}\textit{parallelen}\\ \textit{sich schneidenden}\end{array}\right\}$ *Geraden ist eine* $\left\{\begin{array}{c}\textit{Translation in Richtung senkrecht zu den}\\ \textit{Drehung um den Schnittpunkt der}\end{array}\right\}$ *beiden Spiegelgeraden.*

Die folgenden Sätze beziehen sich auf Drehungen.

Hilfssatz: *Ist δ eine Drehung um S und s eine beliebige Gerade durch S, dann existiert eine Gerade t mit $\delta = \sigma_t\sigma_s$.*

Beweis: Jedenfalls läßt sich δ als Produkt zweier Geradenspiegelungen darstellen: $\delta = \sigma_g\sigma_h$. Hieraus folgt: $\delta\sigma_s = \sigma_g\sigma_h\sigma_s = \sigma_t$ mit einer Geraden t durch $g \cap h$ nach dem Dreispiegelungssatz, also $\delta = \sigma_t\sigma_s$.

Satz 4 *Bei einer Drehung um S sind alle geordneten Paare von Original- und Bildhalbgerade mit Anfangspunkt S zueinander gleichsinnig kongruent.*

Beweis: Sei δ Drehung um S, ferner h, k Halbgeraden mit dem Anfangspunkt S, h', k' ihre Bilder bei δ, k_0 sei die Trägergerade von k. Es gibt eine Gerade w mit $\sigma_w(h) = k$. Dann gilt $\sigma_{k_0}\sigma_w(h) = k$. Zu zeigen ist, daß auch $\sigma_{k_0}\sigma_w(h') = k'$ ist. Es ist $\sigma_{k_0}\sigma_w\delta(h) = \sigma_{k_0}\sigma_w\sigma_a\sigma_b(h) = \sigma_{k_0}\sigma_b\sigma_a\sigma_w = \sigma_a\sigma_b\sigma_{k_0}\sigma_w(h) = \sigma_a\sigma_b(k) = \delta(k) = k'$, was zu zeigen war.

Definition: Ein *Drehwinkel* ist ein geordnetes Paar von Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt. Bezeichnung: $\sphericalangle(h,k)$, $\sphericalangle ABC$.

Definition: Eine *Drehwinkelgröße* ist eine Äquivalenzklasse von Drehwinkeln bezüglich gleichsinniger Kongruenz.

Folgerung:

Zu jeder Drehung gehört eine Drehwinkelgröße, sie ist durch ein beliebiges geordnetes Paar aus Original- und Bildhalbgerade mit dem Drehzentrum als Anfangspunkt gegeben. Umgekehrt ist eine Drehung durch Vorgabe eines Zentrums und einer Drehwinkelgröße eindeutig bestimmt.

Satz 5 *Die sämtlichen Drehungen um ein festes Zentrum bilden eine kommutative Gruppe.*

Beweis: Es seien δ_1, δ_2 zwei Drehungen um Z. Es gibt Geraden h, k mit $\delta_1 = \sigma_h\sigma_k$, und nach dem Hilfssatz gibt es eine Gerade l mit $\delta_2 = \sigma_k\sigma_l$. Nun folgt unter Anwendung des Dreispiegelungssatzes: $\delta_2\delta_1 = \sigma_k\sigma_l\sigma_h\sigma_k = \sigma_k\sigma_k\sigma_h\sigma_l = \sigma_h\sigma_l = \delta_1\delta_2$.

Bemerkung: Im Gegensatz zur Gruppe der Translationen enthält diese Gruppe auch Elemente endlicher Ordnung, insbesondere Involutionen (die Punktspiegelungen).

Zur Messung von Drehwinkelgrößen:

Mit einem elementaren Winkelfunktional werden Winkel gemessen, bei denen die Reihenfolge der Schenkel keine Rolle spielt (vgl. **1.4.1**). Bei den Drehwinkeln ist die Reihenfolge wesentlich: Bei Übergang zur inversen Drehung kehrt sich die Reihenfolge der Winkelschenkel um. Werden die elementaren Winkel mit Zahlen zwischen 0 und π gemessen, so kann man für Drehwinkel den Bereich der Maßzahlen auf das Intervall $]-\pi,\pi]$ oder $[0,2\pi[$ ausdehnen (hat damit für die „Nullwinkel" $\sphericalangle(h,h)$ die Maßzahl 0), und für betragsmäßig kleine Winkelmaßzahlen entspricht der Zusammensetzung zweier Drehungen die Summe der zugeordneten Maßzahlen ihrer Drehwinkelgrößen. Diese Eigenschaft kann aber nicht für alle Winkelgrößen gelten, es müßte dann z.B. $\pi+\pi = 0$ sein, was im Bereich der reellen Zahlen nicht möglich ist. Im Bereich der *Restklassen modulo* 2π kann man aber jeder Drehwinkelgröße eine Restklasse zuordnen, so daß dem Produkt zweier Drehungen die Summe der Restklasssen entspricht.

Zur Erinnerung: Im Bereich der reellen Zahlen ist durch

$$x \text{ äq } y \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es existiert eine ganze Zahl } k \text{ mit } x - y = k \cdot 2\pi$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Mit den Äquivalenzklassen, den *Restklassen* kann man rechnen, indem man z.B. ein Summe zweier Restkklassen K_1, K_2 so definiert: Man wählt $z_1 \in K_1$ und $z_2 \in K_2$ und erklärt die Restklasse, der die Zahl $z_1 + z_2$ angehört, als Summe $K_1 + K_2$. Man hat dazu noch nachzuweisen, daß sich bei anderer Wahl der Zahlen z_1, z_2 dieselbe Restklasse ergibt.

Eine Zuordnung von Restklassen zu Drehwinkeln macht es erforderlich, die Ebene zu orientieren. Die von $\neq \sphericalangle(h,h)$ und $\sphericalangle(h^+,h^-)$ verschiedenen Drehwinkel zerfallen dann in zwei Sorten: Solche, bei denen der zweite Schenkel „rechts" vom ersten und solchen, bei denen er „links" vom ersten liegt. Ist w ein elementares Winkelfunktional (vgl. **1.4.1**) mit Wertebereich $]0,\pi[$, so ordnet man dem Drehwinkel $\sphericalangle(h,k)$ die Restklasse modulo 2π zu, in der die Zahl $w(\measuredangle\,(h,k))$ liegt, falls $\sphericalangle(h,k)$ zur ersten Sorte gehört, und wenn $\sphericalangle(h,k)$ zur zweiten Sorte gehört, ordnet man ihm die Restklasse der Zahl $-w(\measuredangle\,(h,k))$ zu. Es folgt hieraus, wenn man einer Drehung die so definierte Restklasse zuordnet, die zu ihrer Drehwinkelgröße gehört:

Satz 6 *Die Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt ist isomorph zur Gruppe, die die Restklassen reeller Zahlen modulo 2π bezüglich der Addition bilden.*

Ungleichsinnige Kongruenztransformationen

Die ungleichsinnigen Kongruenztransformationen sind entweder Geradenspiegelungen oder Produkte aus drei Geradenspiegelungen. Falls im zweiten Fall die drei Spiegelgeraden kopunktal sind, ergibt sich nach dem Dreispiegelungssatz wieder eine Geradenspiegelung. Es seien also a, b, c drei nicht kopunktale Geraden, und es wird $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ untersucht.

Fall 1: a ist nicht parallel zu c.
Es sei $S := a \cap b$, ferner l das Lot von S auf c, der Fußpunkt sei F. Nach dem Hilfssatz gibt es eine Gerade d mit $\sigma_b\sigma_a = \sigma_l\sigma_d$. Folglich wird $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\sigma_l\sigma_d = \sigma_F\sigma_d$. Es sei k das Lot von F auf d, und d' sei die Parallele zu d durch F, und $G := k \cap d$. Dann wird $\sigma_F\sigma_d = \sigma_F\sigma_G\sigma_k$. Es ist aber $\sigma_F\sigma_G$ eine Translation in Richtung der Geraden $FG = k$.
Fall 2: $a \parallel b$.
Wenn auch $c \parallel b$ ist, dann wird $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\sigma_c\sigma_{a'} = \sigma_{a'}$, es ergibt sich eine Geradenspiegelung. Ist c nicht parallel zu b, geht man analog zum Fall 1 vor.
In beiden Fällen ergibt sich also, wenn nicht eine Geradenspiegelung, dann eine Zusammensetzung von Translation und Geradenspiegelung, wobei die Translation die Richtung der Spiegelgeraden hat.

Definition: Eine *Schubspiegelung* ist ein Produkt aus einer Geradenspiegelung und einer Translation in Richtung der Spiegelgeraden.

Folgerung: Bei Schubspiegelung sind Translation und Geradenspiegelung vertauschbar, d.h., $\tau\sigma_g = \sigma_g\tau$, falls τ die Richtung von g hat.
Beweis: Die Translation τ kann als Produkt zweier Punktspiegelungen dargestellt werden. Unter Verwendung der Lote in diesen Punkten zur Geraden g gilt dann: $\tau\sigma_g = \sigma_A\sigma_B\sigma_g = \sigma_{l_A}\sigma_g\sigma_g\sigma_{l_B}\sigma_g = \sigma_{l_A}\sigma_{l_B}\sigma_g = \sigma_g\sigma_A\sigma_B\sigma_g\sigma_g = \sigma_g\sigma_A\sigma_B = \sigma_g\tau$.
Zusammenfassend gilt

Satz 7 *Jede gleichsinnige Kongruenztransformation ist eine Translation oder eine Drehung.*
Jede ungleichsinnige Kongruenztransformation ist eine Geradenspiegelung oder eine Schubspiegelung.

2.1.2 Ähnlichkeitstransformationen

Definition: Unter einer *Ähnlichkeitstransformation* versteht man eine Zusammensetzung endlich vieler Dilatationen und Kongruenztransformationen.

Ähnlichkeitstransformationen sind demnach Produkte beispielsweise der Form $\delta_1\delta_2\varphi_1\delta_3\varphi_2\varphi_3\varphi_4\delta_4\delta_5\cdots\delta_k\varphi_l$, wo die δ_i Dilatationen und die φ_j Kongruenztransformationen sind. Da die Dilatationen entweder Translationen oder Streckungen sind und die Translationen bereits Kongruenztransformationen sind, hätte man die Ähnlichkeitstransformationen auch als endliche Produkte aus Streckungen und Kongruenztransformationen definieren können.

Definition: Zwei Figuren F, F' heißen *ähnlich*, wenn es eine Ähnlichkeitstransformation α mit $\alpha(F) = F'$ gibt.

Eigenschaften der Ähnlichkeitstransformationen:

1. Die Menge aller Ähnlichkeitstransformationen bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

   Beweis: Das Produkt zweier endlicher Produkte aus Dilatationen und Kongruenztransformation ist wieder ein solches, ebenso das inverse eines solchen Produktes.

2. Jede Ähnlichkeitstransformation bildet einen beliebigen Winkel auf einen dazu kongruenten ab (Winkelgrößen sind invariant gegen Ähnlichkeitstransformation).

   Beweis: Es genügt, eine einzige Streckung zu betrachten. Eine Streckung aber führt einen Winkel wegen der Parallelität von Original- und Bildgerade und der Gleichsinnigkeit in einen dazu sogar translationsgleichen Winkel über.

3. Ist α eine Ähnlichkeitstransformation, so existiert dazu eine positive reelle Zahl ϱ, so daß für jede Strecke gilt: $l(\alpha(s)) = \varrho l(s)$ (es gibt einen *universellen Längenveränderungsfaktor*).

Es genügt, dies für eine einzige Streckung ζ nachzuweisen. Sei $s = \overline{AB}$, $\zeta(A) = A'$, $\zeta(B) = B'$. Zu ζ gehöre der Streckungsfaktor ϱ. Auf Grund der Definition von Streckungsfaktoren gilt, falls ζ das Zentrum Z hat, $\overrightarrow{ZA'} = \varrho\overrightarrow{ZA}$ und $\overrightarrow{ZB'} = \overrightarrow{ZB}$. Hieraus folgt $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{ZB'} - \overrightarrow{ZA'} = \varrho\overrightarrow{AB}$ und hieraus $l(\overline{A'B'}) = |\varrho| l(\overline{AB})$.

Bemerkung: Eine Ähnlichkeitstransformation ist genau dann eine Kongruenztransformation, wenn ihr Längenveränderungsfaktor gleich eins ist.

4. Hat eine Affinität die in 2. oder 3. genannten Eigenschaften, dann ist sie eine Ähnlichkeitstransformation.

   Beweis: Eine Affinität ist durch Vorgabe eines Original- und zugehörigen Bilddreiecks eindeutig festgelegt (Satz 26 aus **1.1.5.2**). Ein Dreieck ist in eines mit gleichgroßen Winkeln aber stets durch Kongruenztransformation und eine einzige Streckung, also durch Ähnlichkeitstransformation überführbar, ebenso in eines mit Seiten, dessen Längen mit denen des Originals ein konstantes Verhältnis bilden (hierbei wird der Kongruenzsatz „sss“ verwendet).

5. Sind (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2) beliebige Punktepaare mit $P_i \neq Q_i$ (zwei Strecken), so existieren genau eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation α_1 und genau eine ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation α_2 mit $\alpha_i(P_1) = P_2$ und $\alpha_i(Q_1) = Q_2$ $(i = 1, 2)$.

   Beweis der Existenz: $P_1Q_1^+ \longrightarrow P_2Q_2^+$ durch gleichsinnige Kongruenztransformation φ, Streckung ζ mit Zentrum P_2 und $\varphi(Q_1) \longrightarrow Q_2$, $\zeta\varphi$ ist gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation. Die Geradenspiegelung $\sigma_{P_2Q_2}$ ändert nichts an der erforderlichen Punktzuordnung, $\sigma_{P_2Q_2}\zeta\varphi$ ist ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation.

   Beweis der Einzigkeit: Sind α_1, α_2 zwei solche Ähnlichkeitstransformationen, dann hat $\alpha_2^{-1}\alpha_1$ die zwei Fixpunkte P_1, Q_1 ist also (Längenveränderungsfaktor 1!) eine Kongruenztransformation und somit entweder die Geradenspiegelung an P_1Q_1 oder die identische Abbildung, es gibt also nur zwei Möglichkeiten.

Um einen Einblick in den Abbildungsmechanismus von Ähnlichkeitstransformationen zu bekommen, ist die Frage nach Fixpunkten sinnvoll. Diese wird durch folgenden Hilfssatz beantwortet:

Hilfssatz *Jede Ähnlichkeitstransformation, die nicht Kongruenztransformation ist, hat genau einen Fixpunkt*

Zum Beweis: Der Satz kann durch Rechnung mit Koordinaten bewiesen werden (wozu aber erst die Koordinatendarstellung für Ähnlichkeitstransformationen entwickelt werden müßte). Ein anschaulicherer Existienzbeweis für den Fixpunkt benutzt ein Kontraktionsprinzip: Man bildet einen beliebigen Punkt fortgesetzt ab, je nach Längenveränderungsfaktor mit der Ähnlichkeitstransformation oder ihrer Inversen, und erhält eine Punktfolge, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

Genauer: Sei α eine Ähnlichkeitstransformation mit einem Längenveränderungsfaktor $\varrho \neq 1$, X ein beliebiger Punkt.

Fall 1: $0 < \varrho < 1$. Es sei $X_n := \alpha^n(X)$, $l := |\overline{XX_1}|$. Die n-te Seite des Polygonzuges $X_0X_1X_2\ldots$ hat die Länge $\varrho^{n-1}l$. Wegen $\varrho < 1$ bilden die Zahlen ϱ^n eine Nullfolge, und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente Punktfolge mit einem Grenzpunkt Z. Dieser Punkt ist Fixpunkt bei α, wie nun gezeigt wird: Es sei $Z' := \alpha(Z)$ und $|\overline{ZZ'}| = r$. Ist $r > 0$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß $|\overline{X_nZ}| < \frac{r}{2}$ für $n \geq k$ gilt. Aus $|\overline{X_kZ}| < \frac{r}{2}$ folgt durch Anwendung von α die Beziehung

$$|\overline{X_{k+1}Z'}| = \varrho|\overline{X_kZ}| < \varrho\frac{r}{2}.$$

Andererseits ist (Dreiecksungleichung!)

$$\begin{array}{rcll}
|\overline{ZZ'}| & \leq & |\overline{ZX_{k+1}}| + |\overline{X_{k+1}Z'}|, & \text{also} \\
r & \leq & \dfrac{r}{2} + \varrho\cdot\dfrac{r}{2} & \text{bzw.} \\
\dfrac{r}{2} & \leq & \varrho\dfrac{r}{2} & \text{bzw.} \\
0 & \leq & (\varrho - 1)\dfrac{r}{2}, &
\end{array}$$

das ist aber für $0 < \varrho < 1$ und $0 < r$ ein Widerspruch; also ist $r = 0$ bzw. $Z' = \alpha(Z) = Z$.

Fall 2: $\varrho > 1$. Man betrachte die Folge $X_n := \alpha^{-n}(X)$ und schließe wie in Fall 1.

Beweis der Einzigkeit des Fixpunktes: Würde es einen weiteren Fixpunkt geben, wäre der Längenveränderungsfaktor gleich 1, die Abbildung also eine Kongruenztransormation, was in der Voraussetzung ausgeschlossen wurde.

Sei nun α eine beliebige Ähnlichkeitstransformation, die keine Kongruenztransformation ist. Ferner sei F der Fixpunkt von α und P ein beliebiger Punkt $\neq F$ sowie $P' := \alpha(P)$. Ist α gleichsinnig, so kann α in der Form $\delta \circ \zeta$ dargestellt werden, wobei δ die Drehung um F ist, die die Halbgerade FP^+ auf FP'^+ abbildet und ζ die Streckung mit dem Zentrum F, die $\delta(P)$ auf P' abbildet. Ist α ungleichsinnig, so sei σ_w die Geradenspiegelung mit $\sigma_w(FP^+) = FP'^+$ und ζ die Streckung mit dem Zentrum F und $\sigma_w(P) = P'$, es wird dann $\alpha = \zeta \circ \sigma_w$.

Die beiden hier vorkommenden Typen von Ähnlichkeitsabbildungen werden mit besonderen Namen versehen:

Definition: Eine Drehstreckung ist das Produkt einer Drehung und einer Streckung, wobei die Zentren von Streckung und Drehung gleich sind.

Definition: Eine Spiegelstreckung ist das Produkt einer Geradenspiegelund und einer Streckung, wobei das Streckungszentrum ein Punkt der Spiegelgeraden ist.

Somit gilt nun:

Satz 8 *Jede gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, die nicht Kongruenztransformation ist, ist eine Drehstreckung.*

Jede ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, die nicht Kongruenztransformation ist, ist eine Spiegelstreckung.

2.1.3 Affine Transformationen

In **1.1.5** wurden affine Transformationen bereits behandelt, daher hier nur einige ergänzende Bemerkungen.

Eine erste Klassifikation der affinen Transformationen kann nach ihren Fixpunktmengen erfolgen. Die Fixpunkte ermittelt man zweckmäßigerweise mittels Koordinaten. Jede affine Abbildung läßt sich in der Form

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f \end{aligned}$$

rechnerisch darstellen, wobei $x, y, x'y'$ Koordinatenvariablen sind und a, b, c, d, e, f reelle Konstanten mit $ad - bc \neq 0$. Die Bestimmung der Fixpunkte bedeutet, das lineare Gleichungssystem zu lösen, das sich aus den Abbildungsgleichungen ergibt, wenn man $x' = x$ und $y' = y$ setzt. Die Koeffizientenmatrix M und die erweiterte Koeffizientenmatrix M_{erw} sind

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}, \quad M_{erw} = \begin{pmatrix} a-1 & b & -e \\ c & d-1 & -f \end{pmatrix},$$

und die Fixpunktmengen ergeben sich aus den verschiedenen möglichen Werten für die Ränge dieser beiden Matrizen. Ergebnis:

Fall Nr.	Rang von M	Rang von M_{erw}	Fixpunktmenge	Abbildungstyp
1	0	0	$\mathbb{R}^2$	ident.Abb.
2	0	1	$\emptyset$	Translat. $\neq id.$
3	1	1	Gerade	axiale Aff.
4	1	2	$\emptyset$	axiale Aff.$\circ$ Translat.
5	2	2	genau einer	Affindrehung und Streckung $\circ$ axiale Aff.

Änderung von Strecken und Winkeln bei affinen Transformationen:

Zu jeder Richtung gibt es einen für alle Strecken dieser Richtung gültigen Längenveränderungsfaktor. Dies folgt für die Strecken auf einer Geraden aus der Teilverhältnisinvarianz, und Strecken auf dazu parallelen Geraden können durch Parallelprojektion auf die erste Gerade abgebildet werden, sie gehen dabei in translationsgleiche Strecken über.

Winkel werden bei affinen Transformationen, die nicht Ähnlichkeitstransformationen sind, in ihrer Größe im allgemeinen geändert. Hinsichtlich rechter Winkel kann man zeigen, daß es genau ein Paar senkrechter Richtungen gibt, deren Bildrichtungen auch wieder senkrecht sind. Zum Beweis ist es zweckmäßig, eine rechnerische Beschreibung des Senkrechtseins zu Verfügung zu haben, die sich folgendermaßen aus dem Satz vom Höhenschnittpunkt ergibt:

Jede Translation $\neq id.$ hat eine Richtung, und zwei Translationen haben genau dann gleiche Richtungen, wenn sie durch gruppentheoretische Transformation mit einer Streckung auseinander hervorgehen (vgl. Hilfssatz 4 aus **1.1.3.1**).

Dasselbe bedeutet in Vektorsprache: Jeder Vektor $\neq 0$ hat eine Richtung. Zwei Vektoren haben genau dann die gleiche Richtung, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist, d.h., wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Es seien $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ Basisvektoren mit $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ und $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. Die Vektoren $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ mögen Richtungen haben, die von denen der Basisvektoren verschieden sind. Sie haben genau dann gleiche Richtung, wenn es ein λ mit $w_1 = \lambda v_1$ und $w_2 = \lambda v_2$ gibt, also $w_1 v_2 = w_2 v_1$ bzw. $\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$ gilt. Es gibt also eine Bijektion zwischen den reellen Zahlen $\neq 0$ und den Richtungen, die von den Richtungen der Basisvektoren verschieden sind: Der Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist der Quotient $\frac{v_2}{v_1}$ bijektiv zugeordnet.

Es gibt folglich eine reelle Funktion f, die jeder reellen Zahl $x \neq 0$, die bei der genannten Bijektion der Richtung R zugeordnet ist, diejenige Zahl zuordnet, die bei der genannten Bijektion der zu R senkrechten Richtung zugeordnet ist. Diese Funktion wird jetzt ermittelt.

Es sei $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $X = (x,0)$. Das Lot von A auf BX schneide das Lot von X auf BA im Punkt S: Im Dreieck BXS liefert der Satz vom Höhenschnittpunkt, daß die Punkte S, O, B kollinear sind, d.h., S hat die Koordinaten $(0,s)$ mit geeignetem s. Es gilt

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{BX} \perp \overrightarrow{AS}, \quad \text{also} & \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ s \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{XS}, \quad \text{also} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -x \\ s \end{pmatrix} \end{array},$$

das bedeutet nach Übergang zu den Verhältnissen:

$$-s = f(\frac{-1}{x}) \quad \text{und} \quad -\frac{s}{x} = f(-1).$$

Elimination von s führt auf $f(-\frac{1}{x}) = f(-1) \cdot x$ bzw., wenn man $y := -\frac{1}{x}$ setzt:

$$f(y) = -\frac{f(-1)}{y}$$

Zur Bestimmung der Konstanten $f(-1)$ betrachte man ein gleichseitiges Parallelogramm, das von den gleichlangen Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ erzeugt wird: Hierfür gilt $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 \perp \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, so daß in bezug auf ein Koordinatensystem mit gleichlangen senkrechten Vektoren die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht ist. Hieraus folgt $f(-1) = 1$, also gilt für alle y:

$$f(y) = -\frac{1}{y}$$

Geht man zu den Vektorkoordinaten zurück, hat man den

Hilfssatz *Sind* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *und* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ *die Koordinatendarstellungen zweier Vektoren in bezug auf eine Basis, die aus zwei gleich langen und zueinander senkrechten Vektoren besteht, so gilt:*

$$v \perp w \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$

Mit diesem Hilfssatz läßt sich nun obige Behauptung wie folgt beweisen:
Es seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis aus gleichlangen senkrechten Vektoren. Die dazu senkrechte Richtung kann nach Hilfssatz z.B. durch den Vektor $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gegeben werden. Die Bildvektoren haben, wenn man die oben schon verwendeten Abbildungsgleichungen verwendet, die Koordinaten $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -ay+bx \\ -cy+dx \end{pmatrix}$. Das Senkrechtsein der Bildvektoren ist nach Hilfssatz mit dem Bestehen der Gleichung

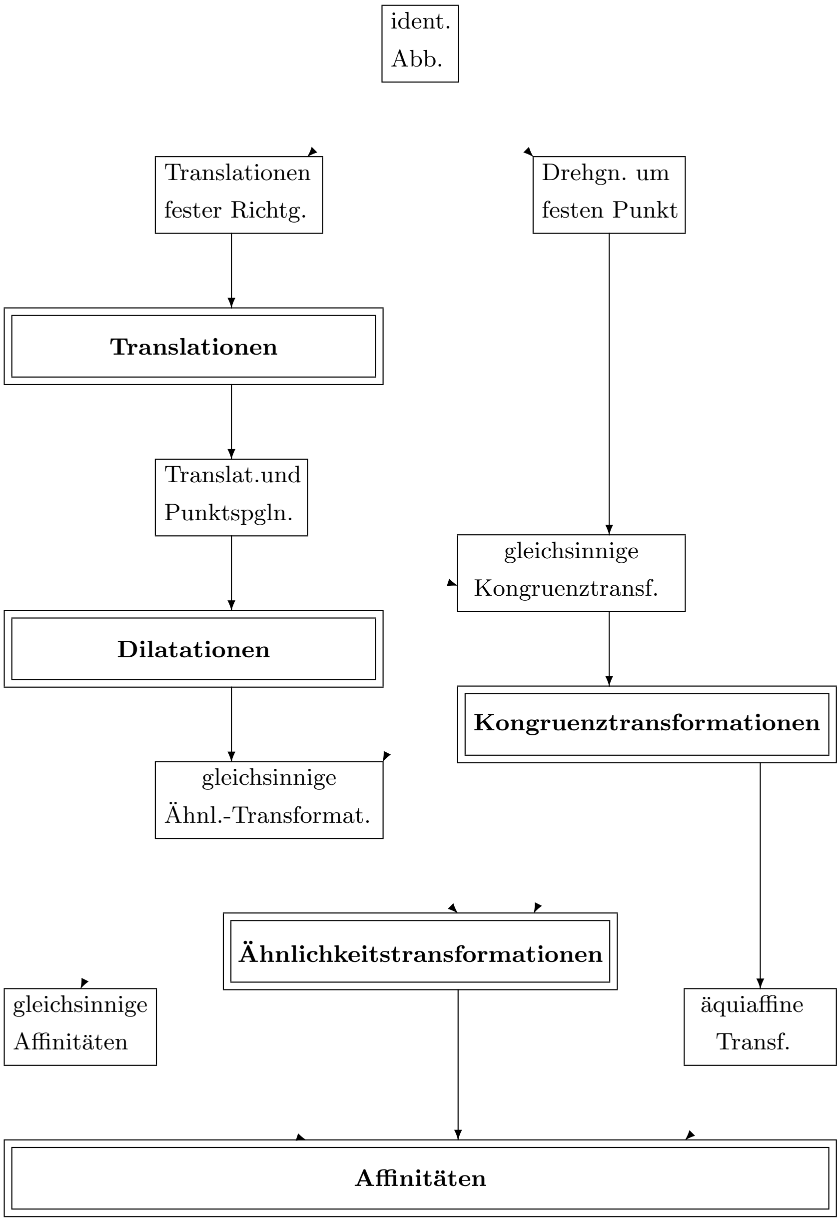
$$x^2(ab+cd)+xy(-a^2+b^2-c^2+d^2)+y^2(-ab-dc)=0$$

gleichwertig. Dies ist eine quadratische Gleichung für das Verhältnis $\frac{x}{y}$ (oder $\frac{y}{x}$), ihre Diskriminante ist $(-a^2+b^2-c^2+d^2)^2+4(ab+cd)^2$, und dieser Ausdruck ist für alle a, b, c, d nicht negativ, so daß es immer ein Paar (x, y) gibt, für das die Bilder der senkrechten Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ wieder senkrecht sind. Eine genaue Diskussion der quadratischen Gleichung führt zu folgendem

Satz 9 *Zu jeder Affinität, die keine Ähnlichkeits- oder Kongruenztransformation ist, gibt es genau ein Paar zueinander senkrechter Richtungen, deren Bilder auch wieder zueinander senkrecht sind.*

2.1.4 Überblick über ebene Transformationsgruppen

Das folgende Schema gibt eine Übersicht über die in dieser Vorlesung behandelten Transformationsgruppen. Pfeile bedeuten Untergruppenbeziehungen.



2.2 Transformationen im dreidimensionalen euklidischen Raum

2.2.1 Kongruenztransformationen

Satz 10 *Jede Kongruenztransformation ist als Produkt von höchstens vier Ebenenspiegelungen darstellbar.*

Beweis: Nach dem in **1.5.3** formulierten Axiom ist eine Kongruenztransformation durch Vorgabe eines Semi-Raumes und seiner Bildmenge eindeutig festgelegt. Sei φ eine Kongruenztransformation und S ein Semi-Raum. Eine erste Ebenenspiegelung σ_1 führt den Anfangspunkt von S in den von $\varphi(S)$ über, eine zweite Ebenenspiegelung σ_2 die Randhalbgerade von $\sigma_1(S)$ in die von $\varphi(S)$, eine dritte die Randhalbebene von $\sigma_2\sigma_1(S)$ in die von $\varphi(S)$ und schließlich führt eine vierte Ebenenspiegelung σ_4 den Halbraum von $\sigma_3\sigma_2\sigma_1(S)$ in den von $\varphi(s)$ über; unter Umständen sind einige der vier Ebenenspiegelungen nicht erforderlich. Das Produkt der erforderlichen Ebenenspiegelungen liefert dasselbe Bild von S wie φ, also ist φ gleich diesem Produkt.

Folgerung:

Jede gleichsinnige Kongruenztransformation ist als Produkt von zwei oder vier Ebenenspiegelungen darstellbar,
jede ungleichsinnige Kongruenztransformation ist als Produkt von drei Ebenenspiegelungen darstellbar oder ist selbst eine Ebenenspiegelung.

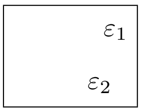
2.3.1.1 Gleichsinnige Kongruenztransformationen

a) Produkte von zwei Ebenenspiegelungen an Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, $\varphi = \sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}$.

Fall 1): $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 =$ Gerade a.

a ist Fixpunktgerade.
Die Ebenen senkrecht zu a sind Fixebenen.
In einer Ebene senkrecht zu a induziert φ eine Drehung um den doppelten Winkel zwischen den Ebenen:

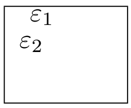
a



Definition: Eine *Drehung um eine Achse* a ist eine gleichsinnige Kongruenztransformation mit der Fixpunktgeraden a.
In jeder Ebene senkrecht zu a wird eine (ebene) Drehung induziert, alle Drehwinkel sind translationsgleich.

Fall 2): $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Alle Ebenen senkrecht zu $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sind Fixebenen. In einer beliebigen Ebene $\perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$ wird eine Translation induziert.



φ ist eine Tranlation in Richtung senkrecht zu $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Ergebnis und Folgerung:

Das Produkt zweier Ebenenspiegelungen ist eine Drehung um eine Achse oder eine Translation, und umgekehrt ist jede Drehung als Produkt zweier Ebenenspiegelungen an Ebenen durch die Achse darstellbar und jede Tranlation als Produkt zweier Ebenenspiegelungen an Ebenen senkrecht zur Translationrichtung, dabei ist jeweils eine der beiden Spiegelebenen beliebig wählbar.

Satz 11 *Haben drei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ eine Gerade a gemeinsam, so ist $\sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}$ eine Ebenenspiegelung an einer Ebene durch a.*
Sind drei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ parallel, so ist $\sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}$ eine Ebenenspiegelung an einer zu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ parallelen

Ebene.

Beweis:
Es ist $\sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1} = \sigma_{\varepsilon_3}\varphi$, wo φ eine Drehung um eine Achse a oder eine Translation in Richtung senkrecht $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ist. Es kann φ in der Form $\varphi = \sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_4}$ mit ε_4 durch a oder senkrecht zu $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dargestellt werden. Hieraus folgt $\sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1} = \sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_4} = \varepsilon_4$, was zu zeigen war.

b) Produkte von vier Ebenenspiegelungen

Nach a) ist dies b1) Translation $\circ$ Translation,
b2) Translation $\circ$ Drehung oder Drehung $\circ$ Translation,
b3) Drehung $\circ$ Drehung.

Zu b1): Das Ergebnis ist eine Translation (Inzidenzgeometrie, s. **1.5.1** bzw **1.1.2.2**)

Zu b2):
Spezialfall: Die Translation hat die Richtung der Achse.

Definition: Eine *Schraubung* ist die Zusammensetzung einer Drehung um eine Achse a mit einer Translation in Richtung von a.

Folgerungen:

Im Falle einer Schraubung sind Drehung und Translation vertauschbar.
Eine Schraubung hat keine Fixpunkte.

Allgemeiner Fall: Die Richtung von Translation und Drehachse sind verschieden.

Behauptung: Auch in diesem Fall ist die Kongruenztransformation als Schraubung darstellbar. Beweis: Es sei $\varphi = \tau\delta$, wo τ eine Translation, δ eine Drehung um eine Achse a ist. Es kann τ in der Form $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ dargestellt werden, wo $\tau_1 \parallel a$ und $\tau_2 \perp a$ gilt, $\varphi = \tau_1\tau_2\delta$. In einer beliebigen Ebene $\perp a$ induziert $\tau_2\delta$ eine Drehung um ein Zentrum Z, alle diese Zentren Z sind translationsgleich bezüglich Tranlationen in Richtung a, somit ist $\tau_2\delta$ eine Drehung δ_1 um eine Achse parallel zu a, und es wird $\varphi = \tau_1\delta_1$ eine Schraubung.

Zu b3):

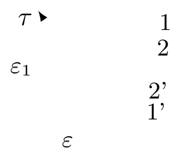
Spezialfall: Die Drehachsen schneiden isch in einem Punkt.

Dieser Punkt ist Fixpunkt. Ferner sind die Drehungen darstellbar als Produkt zweier Ebenenspiegelungen, wobei eine Ebene die durch die Drehachsen bestimmte Ebene ε ist, also $\varphi = \sigma_{\varepsilon_1}\sigma_\varepsilon\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon 2} = \sigma_{\varepsilon_1}\sigma_{\varepsilon_2}$; und da $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ den Fixpunkt enthält, ist φ eine Drehung.

Allgemeiner Fall: Die Drehachsen sind windschief.

Hilfssatz 1 *Es sei σ_ε eine Ebenenspiegelung und τ eine Translation. Dann existiert eine Ebene ε_1 und eine Tranlation τ_1 in Richtung ε_1, so dass $\sigma_\varepsilon\tau = \sigma_{\varepsilon_1}\tau_1$ gilt.*

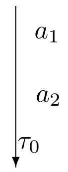
Beweis:
Man betrachte das System aller Ebenen parallel zu ε. Dieses wird bei $\sigma_\varepsilon\tau$ auf sich abgebildet, und zwar gegenläufig. Folglich existiert eine Fixebene ε_1. Es kann τ in der Form $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ dargestellt werden, wobei τ_1 in Richtung von ε verschiebt und τ_2 in einer zu ε senkrechten Richtung. Es wird $\varphi := \sigma_{\varepsilon_1}\sigma_\varepsilon\tau_1\tau_2 = \tau_3\tau_1\tau 2$ mit τ_3 in Richtung parallel ε, also wegen der Kommutativität von Translationen $\varphi = \tau_1\tau_3\tau_2$. Es läßt φ die Ebene ε_1 fest, also ist $\tau_3\tau_2 = id$ und $\varphi = \tau_1$ und $\sigma_\varepsilon\tau = \sigma_{\varepsilon_1}\tau_1$, was zu zeigen war.



Definition: Eine *Schubspiegelung* ist die Zusammensetzung einer Ebenenspiegelung mit einer Translation in Richtung parallel zur Spiegelebene.

Bemerkung: Bei Schubspiegelungen sind Translation und Ebenenspeigelung vertauschbar (Beweis: Übungsaufgabe).

In dem jetzt betrachteten Fall des Produktes zweier Drehungen $\delta_2 \circ \delta_1$ mit windschiefen Drehachsen a_2, a_1 existieren zwei parallele Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $a_i \subset \varepsilon_i$, und es gibt Ebenen $\varepsilon_3, \varepsilon_4$, so dass $\delta_2 = \sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}$ und $\delta_1 = \sigma_{\varepsilon_1}\sigma_{\varepsilon_4}$ ist. Es wird dann $\delta_2\delta_1 = \sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}\sigma_{\varepsilon_4} = \sigma_{\varepsilon_3}\tau_0\sigma_{\varepsilon_4}$ mit einer Translation τ_0 in Richtung senkrecht $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Nach dem Hilfssatz ist $\tau_0\sigma_{\varepsilon_4}$ in der Form $\sigma_{\varepsilon_5}\tau_1$ darstellbar, wo τ_1 eine Richtung parallel ε_5 hat. Also ist $\delta_2\delta_1 = \sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_5}\tau_1$; hierbei ist $\sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_5}$ eine Drehung oder eine Translation, so dass $\delta_2\delta_1$ ein Schraubung oder eien Drehung oder eine Translation ist.



Ergebnis: Jede gleichsinnige Kongruenztransformation ist eine Schraubung oder eine Drehung oder eine Translation.

2.3.1.2 Ungleichsinnige Kongruenztransformationen

Es sind Produkte von drei Ebenenspiegelungen zu betrachten, $\varphi = \sigma_{\varepsilon_3}\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}$.

Fall a): $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ oder $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 =$ Gerade a.

Nach Satz 11 ist φ eine Ebenenspiegelung an einer Ebene $\parallel \varepsilon_i$ oder durch a.

Fall b): $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel$, aber $\varepsilon_2 \nparallel \varepsilon_3$

φ ist ein Produkt aus Ebenenspiegelung und Translation, nach dem Hilfssatz also eine Schubspiegelung.

Fall c): ε_1 und ε_2 sind nicht parallel.

φ ist in diesem Fall Produkt aus Ebenenspiegelung und Drehung, $\varphi = \sigma_\varepsilon \circ \delta$, die Drehung δ möge die Achse a haben.

Ist speziell a parallel zu ε, so bleiben alle Ebenen senkrecht zu a (und damit zu ε) fest. In jeder solchen Ebene wird eine Schubspiegelung induziert, und es ergibt sich, dass φ eine räumliche Schubspiegelung ist.

Im allgemeinen aber ist a nicht parallel zu ε. Der Schnittpunkt $S := a \cap \varepsilon$ ist ein Fixpunkt von φ. Eine Kugelfläche K mit dem Mittelpunkt S bleibt demnach als ganzes fest. Ist P ein Punkt auf K und $P' := \varphi(P)$, $P'' := \varphi(P')$, so schneiden sich die zu den Bögen $\overset{\frown}{PP'}$ und $\overset{\frown}{P'P''}$ mittelsenkrechten Großkreise in zwei diametralen Punkten, die wegen der Gleichsinnigkeit vertauscht werden müssen, die zugehörige Äquatorebene muss dabei fest bleiben. Definiert man:

Definition: Eine *Drehspiegelung* ist die Zusammensetzung aus einer Ebenenspiegelung mit einer Drehung um eine zur Spiegelebene senkrechte Achse,

so hat sich φ als eine Drehspiegelung herausgestellt.

Insgesamt gilt:

Satz 12 *Jede gleichsinnige Kongruenztransformation ist als Schraubung, Drehung oder Translation darstellbar.*

Jede ungleichsinnige Kongruenztransformation ist als Drehspiegelung, Schubspiegelung oder Ebenenspiegelung darstellbar.

2.2.2 Ähnlichkeitstransformationen

(Man vergleiche den Abschnitt über Ähnlichkeitstranformationen in der Ebene, **2.1.2**.)

Man definiert Streckungen im Raum wie in der Ebene (Dilatationen mit einem Fixpunkt).

Definition: Eine Ähnlichkeitstransformation ist ein endliches Produkt aus Streckungen und Kongruenztransformationen.

Es folgt wie in der Ebene, dass die Ähnlichkeitstransformationen eine Gruppe bilden, und es gelten die weiteren allgemeinen Eigenschaften für Ähnlichkeitstransformationen, die in **2.1.2** hergeleitet wurden.

Genau wie in der Ebene zeigt man, dass jede Ähnlichkeitstransformation, die nicht Kongruenztransformation ist, einen Fixpunkt hat.

Sei nun α eine Ähnlichkeitstranformation, die keine Kongruenztransformation ist. Sie hat einen Fixpunkt F und einen Längenveränderungsfaktor $s \neq 1$. Ist ζ die Streckung mit dem Zentrum F und dem Streckungsfaktor $\frac{1}{s}$, so ist $\zeta \circ \alpha$ eine Kongruenztransformation mit dem Fixpunkt F, kann also nur eine Drehung oder eine Drehspiegelung sein. Man definiert:

Definition: Eine *Drehstreckung* ist die Zusammensetzungen einer Drehung um eine Achse mit einer Streckung, deren Zentrum auf der Achse liegt,

Definition: Eine *Spiegelstreckungen* ist die Zusammensetzungen einer Ebenenspiegelung mit einer Streckung, deren Zentrum auf der Spiegelebene liegt.

Somit folgt der

Satz 13 *Jede gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, die keine Kongruenztransformation ist, ist als Drehstreckung darstellbar.*

Jede ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation, die keine Kongruenztransformation ist, ist als Spiegelstreckung darstellbar.

3 Darstellende Geometrie

Anmerkung:

Eine Ausarbeitung dieses Teiles der Vorlesung würde der Zeichnungen wegen einen größeren technischen Aufwand erfordern und muss aus Zeitgründen unterbleiben. Es kann aber auf das auf der Homepage des Geometrielehrstuhls vorliegende Skript von Prof.Hertel sowie auf zahlreiche Bücher zu diesem Thema verwiesen werden.

Gliederung der Vorlesung:

3.0 Projektive Ebenen und Räume

3.1 Parallelprojektion

3.1.1 Allgemeines

3.1.2 Normalprojektion

3.1.2.1 Allgemeines

3.1.2.2 Kotierte Projektion

3.1.2.3 Zweitafelprojektion

3.1.3 Axonometrie

3.1.4 Kreis und Ellipse

3.2 Zentralprojektion

4 Aufgaben

4.1 Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

1.) Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge mit

a) 3, b) 4, c) 5 Elementen.

Man bestimme sämtliche bis auf die Bezeichnung verschiedenen Möglichkeiten, ein System $\mathcal{G}$ von Teilmengen von $\mathcal{P}$ so festzulegen, daß die in der der Vorlesung angegebenen Axiome zur Verbindbarkeit und zur Nichttrivialität erfüllt sind.

Man prüfe alle gefundenen Möglichkeiten auf Gültigkeit des Parallelenaxioms.

2.) In einer affinen Inzidenzebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ sei die Anzahl der Punkte pro Gerade gleich n ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$).

a) Wieviele Punkte, Richtungen, Geraden gibt es in dieser Inzidenzebene?

b) Man bestimme eine solche Ebene mit $n = 3$, indem man $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ explizit angibt. Man zeige, daß es bis auf Bezeichnungsänderung nur eine affine Inzidenzebene mit $n = 3$ gibt.

3.) Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die in der Vorlesung Abschn. 1.1.1 als Beispiel 2 beschriebene affine Inzidenzebene über einem Körper $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \mathbb{K}^2 \\ \mathcal{G} &:= \{\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 :\ ax + by + c = 0\} :\ a,b,c \in \mathbb{K}, a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}. \end{aligned}$$

Jedes Elementtripel $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ bestimmt somit eine Gerade.

a) Man zeige unter Verwendung von Kenntnissen aus der linearen Algebra:

Zwei Tripel (a_i, b_i, c_i) $(i = 1, 2)$ bestimmen genau dann dieselbe Gerade, wenn

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$$

gilt, und sie bestimmen genau dann zwei parallele Geraden, wenn $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 1$ ist.

b) Man verifiziere für $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die Gültigkeit des Parallelenaxioms.

4.) Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die in Aufgabe 3.) genannte affine Inzidenzebene. Die Elemente von $\mathcal{P}$ mögen als 2-1-Matrizen geschrieben werden. Dann gilt: Ist A eine 2-2-Matrix, b eine 2-1-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K}$ und ist die Determinante von A ungleich null, so ist durch

$$\varphi :\ x \mapsto Ax + b$$

eine Kollineation gegeben (Begründung?), und jede Kollineation läßt sich in dieser Weise darstellen (falls $\mathbb{K}$ nur den identischen Automorphismus gestattet).

a) Unter welcher notwendigen und hinreichenden Bedingung für A und b ist φ eine Dilatation bzw. eine Translation?

b) Im Falle der affinen Inzidenzebene mit genau neun Punkten (s. Aufg.2b) schließe man aus a) auf die Anzahl aller Streckungen und aller Translationen in dieser affinen Inzidenzebene.

5.) Folgende Aussage heißt „Kleiner Satz von Desargues“:

> *Es seien a,b,c drei zueinander parallele Geraden, $A_i \in a$, $B_i \in b$, $C_i \in c$ für $i = 1, 2$. Dann gilt: Wenn $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ und $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ ist, dann ist auch $A_1C_1 \parallel A_2C_2$.*

a) Man zeige, daß in einer Desarguesschen Ebene (also einer affinen Inzidenzebene, die den in der Vorlesung angegebenen Axiomen **1** bis **4** genügt) der Kleine Satz von Desargues gilt.

b) Läßt sich der Kleine Satz von Desargues aus den Axiomen **1** bis **3** herleiten?

6.) Es seien A, B, C drei kollineare Punkte mit $A \neq B$ und $B \neq C$. Man zeige, daß es genau eine Dilatation gibt, bei der A auf B und gleichzeitig B auf C abgebildet wird. Unter welcher Bedingung für A, B, C ist diese Dilatation eine Translation? Man konstruiere zu gegebenen kollinearen Punkten A, B, C das Zentrum, falls die Dilatation eine Streckung ist, außerdem sei noch ein nicht zur Geraden AB gehörender Punkt X gegeben.

(Als „Konstruktionsschritte" sind erlaubt: Sind X, Y, U, V gegebene oder schon konstruierte Punkte und sind g, h gegebene oder schon konstruierte Geraden, so können die Verbindungsgerade XY, der Schnittpunkt $g \cap h$ und die Parallele zu g durch X konstruiert werden.)

7.) Kann man in einer Desarguesschen Ebene folgenden „Kleinen Satz von Pappos" beweisen?

Sind g, g' zwei parallele Geraden, A, B, C Punkte von g und A', B', C' Punkte von g', so folgt aus $AB' \parallel BA'$ und $AC' \parallel CA'$ auch $BC' \parallel CB'$.

8.) Es sei τ ein Translation, ζ eine Streckung $\neq id$. Dann ist $\zeta \circ \tau$ ebenfalls eine Streckung (Begründung?).

Man konstruiere (Konstruktion im Sinne von Aufgabe 8 aus Serie 4) das Zentrum von $\zeta \circ \tau$, wenn τ durch ein Punktepaar $A, B := \tau(A)$ und ζ durch drei kollineare Punkte Z, P, Q mit $\zeta(Z) = Z$, $\zeta(P) = Q$ gegeben sind. (Im Falle der Kollinearität von A, B, Z, P, Q sei ein dazu nicht kollinearer Punkt C gegeben.)

<u>Hinweis:</u> τ kann als Produkt von Punktspiegelungen dargestellt werden.

9.) Es seien P_1, P_2, P_3 drei paarweise verschiedene kollineare Punkte und es sei $t := TV(P_1, P_2, P_3)$, wobei t als Zahl aus $\mathbb{K}$ aufgefaßt wird. Für die sechs Permutationen π der Menge $\{1, 2, 3\}$ berechne man die Zahlen $TV(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, P_{\pi(3)})$ als Funktionen von t.

10.) Es sei $\mathcal{Z}$ eine Gruppe von bijektiven Abbildungen der Menge aller Punkte auf sich.

Zwei geometrische Figuren (= Punktmengen, Systeme von Punktmengen) F_1, F_2 heißen $\mathcal{Z}$-äquivalent, wenn es eine Abbildung $\varphi \in \mathcal{Z}$ gibt, so daß $\varphi(F_1) = F_2$ ist.

a) Man bestätige, daß dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Eine geometrische Figur F heiße $\mathcal{Z}$-symmetrisch, wenn es eine Abbildung $\varphi \in \mathcal{Z}$ mit $\varphi \neq id$ gibt, so daß $\varphi(F) = F$ gilt.

Es sei speziell $\mathcal{Z}$ die von allen Translationen und allen Punktspiegelungen gebildete Untergruppe der Gruppe aller Dilatationen. Man untersuche die 2-, 3- und 4-elementigen Punktmengen bezüglich dieser Gruppe auf $\mathcal{Z}$-Symmetrie, dabei sei das Fano-Axiom als gültig vorausgesetzt.

11.) Es seien P_0, P_1, P_2 drei nicht kollineare Punkte und T_0, T_1, T_2 Punkte auf ihren drei Verbindungsgeraden so, daß jeweils T_i, P_{i+1}, P_{i+2} kollinear sind (i läuft modulo 3) und $T_i \neq P_{i+1}, P_{i+2}$ ist. Ferner sei

$$t_i := TV(T_i, P_{i+1}, P_{i+2}) \qquad (i \text{ modulo } 3)$$

Man zeige: Die drei Geraden T_iP_i $(i = 1, 2, 3)$ haben genau dann einen gemeinsamen Punkt oder sind parallel, wenn $t_1t_2t_3 = -1$ ist (Satz von Menelaos).

Hinweis: Man verwende Vektoren und benutze z.B. $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ als Basis.

12.) a) Man zeige: Das Produkt zweier Affinspiegelungen ist genau dann eine Punktspiegelung, wenn die Achse der einen Affinspiegelung zur Affinitätsrichtung der anderen Affinspiegelung gehört.

b) Unter Verwendung von a) zeige man, daß jede Punktspiegelung als Produkt zweier Affinspiegelungen dargestellt werden kann. Welche Möglichkeiten der Darstellung gibt es?

c) Man zeige: Das Produkt zweier Affinspiegelungen mit parallelen Achsen und gleichen Affinitätsrichtungen ist eine Translation. Welche?

13) Es sei v eine reelle 2-1-Matrix und A eine reguläre reelle 2-2-Matrix. Man rechne nach, daß sich bei der Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x) = Ax + v$ das Teilverhältnis dreier Punkte nicht ändert.

14) Zwei Figuren F und F' heißen *affin äquivalent*, wenn es eine Affinität α gibt, so daß $\alpha(F) = F'$ ist. In wieviele Klassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation zerfallen folgende Figurenmengen:

(a) $\{\{X, Y, Z\}: \quad X, Y, Z$ sind drei nicht kollineare Punkte$\}$

(b) $\{\{X, Y, Z\}: \quad X, Y, Z$ sind drei paarweise verschiedene kollineare Punkte$\}$

(c) $\{\{A, B, C, D\}: \quad A, B, C, D$ sind vier zu je dreien nicht kollineare Punkte$\}$

(d) $\{h_1 \cup h_2 \cup h_3: \quad h_1, h_2, h_3$ sind drei paarweise verschiedene Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt$\}$

In jedem Falle ist ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen zu bestimmen (d.h., eine Menge von Figuren, die aus jeder Klasse genau ein Element enthält).

15) Eine Affinität α werde in bezug auf ein Koordinatensystem in Matrizenform durch die Abbildungsgleichung $\alpha(x) = Ax + b$ beschrieben (vgl. Aufgabe 4). Man zeige:

(a) Bei Änderung des Koordinatensystems ändert sich die Determinante der Abbildungsmatrix A nicht.

(b) Die Affinität α ist genau dann gleichsinnig, wenn die Determinante von A positiv ist.

(c) Alle Affinspiegelungen haben als Determinante ihrer Abbildungsmatrix die Zahl -1.

(d) Man charakterisiere unter Verwendung von c) die Affinitäten, die zur äquiaffinen Untergruppe (= Erzeugnis der Affinspiegelungen) gehören durch eine Bedingung für ihre Abbildungsgleichung.

16) Unter dem Mittellot von zwei verschiedenen Punkten P und Q versteht man die Gerade, die senkrecht zur Geraden PQ ist und die den Mittelpunkt von P und Q enthält. Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte. Man zeige:

a) Die Mittellote von A und B, von B und C und von C und A haben einen gemeinsamen Punkt („Satz über die Mittelsenkrechten").

b) Die Lote von A auf BC, von B auf CA und von C auf AB haben einen gemeinsamen Punkt („Satz vom Höhenschnittpunkt").

Hinweis: Im Teil b) kann man den in a) formulierten Satz verwenden; man betrachte die Parallelen durch jeden der Punkte zur Verbindungsgeraden der jeweils anderen beiden Punkte.

17) a) Man formuliere und beweise die Dreieckskongruenzsätze „wsw", „wws" und „sss".

b) Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte.
Man zeige: Aus $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ und $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$ folgt nicht in jedem Falle $\{A, B, C\} \cong \{A', B', C'\}$.

18) Es sei M der Mittelpunkt zu A, B und C ein Punkt $\notin AB$. Man zeige:

$$AC \perp BC \quad \Longleftrightarrow \quad |\overline{MA}| = |\overline{MC}|$$

(Satz des Thales).

19) a) Man zeige, dass die Zerlegungsgleichheit zweier Polygone eine Äquivalenzrelation ist.

b) Man zeige: Zwei Dreiecke, die eine Seite gemeinsam haben und deren Höhen auf dieser Seite die gleiche Länge haben, sind zerlegungsgleich.
Hinweis: Man fälle die Lotdurch zwei Seitenmittelpunkte und untersuche die entstehenden Drei- und Vierecke auf Zerlegungsgleichheit.

20) Man zeige, dass aus den in Abschnitt **1.5.1** der Vorlesung für den dreidimensionalen Raum angegebenen Inzidenzaxiomen der Satz von Desargues (s. Abschnitt **1.1.2.4**) gefolgert werden kann.
Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall, dass die drei kopunktalen Geraden nicht komplanar sind.

21) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene zueinander parallele Geraden und A ein Punkt von a. Man zeige, dass es genau zwei gleichseitige Dreiecke ABC mit $B \in b$ und $C \in c$ gibt.

22) Von zwei Drehungen δ_1, δ_2 seien ihre Zentren Z_1, Z_2 sowie ihre Drehwinkel in Form zweier Halbgeradenpaare $(Z_1X_1^+, Z_1\delta(X_1)^+)$ und $(Z_1X_2^+, Z_2\delta(X_2)^+)$ gegeben. Man konstruiere das Zentrum und den Drehwinkel von $\delta_2 \circ \delta_1$ (vorausgesetzt, dass dies eine Drehung ist). Als Konstruktionsmittel sind Lineal, Winkelübertrager und Winkelhalbierer zugelassen.

23) Es sei A_1, A_2, A_3 ein beliebiges Dreieck. Für $i = 1, 2, 3$ sei B_i der Punkt in der Halbebene $A_{i-1}A_{i+1}A_i^-$ (i läuft modulo 3), für den die Strecken $\overline{B_1A_{i-1}}$ und $\overline{B_1A_{i+1}}$ kongruent sind und der Winkel $\sphericalangle\, A_{i-1}B_iA_{i+1}$ die Größe $\frac{2\pi}{3}$ hat. Man zeige unter Verwendung geeigneter Drehungen, dass $B_1B_2B_3$ ein gleichseitiges Dreieck ist. eidimensionalen Raum angegebenen Inzidenzaxiomen der Satz von Desargues (s. Abschnitt **1.1.2.4**) gefolgert werden kann. Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall, dass die drei kopunktalen Geraden nicht komplanar sind.

24) Es sei σ_ε die Ebenenspiegelung an der Ebene ε und τ eine Translation mit einer zu ε parallelen Translationsrichtung. Man zeige, dass $\sigma_\varepsilon \circ \tau = \tau \circ \sigma_\varepsilon$ ist.

25) Es seien g_1, g_2 zwei zueinander senkrechte windschiefe Geraden mit dem gemeinsamen Lot h. Es sei $A_i := h \cap g_i$ $(i = 1, 2)$, und es sei $l(\overline{A_1A_2}) = 1$. Ferner sei $B_i \in g_i$ der Punkt mit $l(\overline{A_iB_i}) = 1$ und C_i der Punkt mit $\overrightarrow{A_iC_i} = \overrightarrow{A_{i\pm1}B_{i\pm1}}$ $(i = 1, 2)$. Schließlich sei δ_i die Drehung mit der Achse g_i, die $A_iA_{i\pm1}^+$ ind $A_iC_i^+$ überführt ($i = 1, 2$, zwei 90°-Drehungen).
Für die Schraubung $\delta_2 \circ \delta_1$ bestimme man den Winkel des Drehanteils, den Betrag des Verschiebungsanteils und die Lage der Drehachse.

4.2 Merkblatt

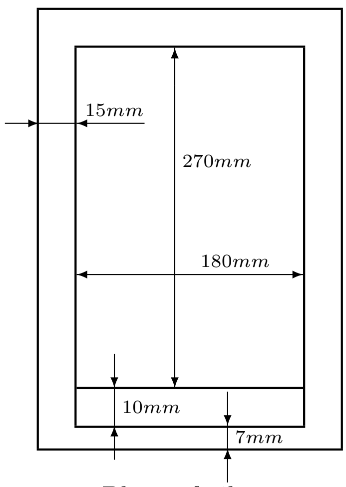
Merkblatt zur Ausführung von Zeichnungen zur Darstellenden Geometrie

Geometrie für Lehrer – Wintersemester 2001/2002

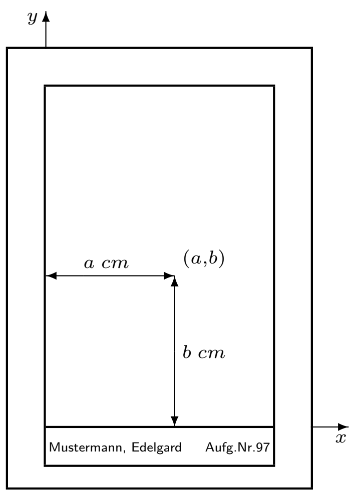
1. Zeichenblatt

- weißes Papier vom Format A4
- Unterteilung in Zeichenfeld (für die Zeichnung), Schriftfeld (für den Namen der/des Zeichnenden und die Aufgabennummer) und Rand gemäß der in der Abbildung angegebenen Maße
- Blattrückseite kann für Konstruktionsbeschreibung genutzt werden
- Koordinatensystem im Zeichenfeld:

  Nullpunkt: linke untere Ecke des Zeichenfeldes
  positive x-Achse: untere Kante des Zeichenfeldes
  positive y-Achse: linke Kante des Zeichenfeldes
  Längeneinheit ist 1cm



Blattaufteilung



Koordinatensystem

2. Technisches

- Es wird nur mit Bleistift gezeichnet.
- Man achte auf saubere, übersichtliche und vollständige Beschriftung!
- Man verwende zwei gespitzte Bleistifte (harter Stift, 2H, zum Vorzeichnen; weicher Stift, HB, zum Nachzeichnen), einen Zirkel, zwei verschiedene rechtwinklige Dreiecke (ein gleichschenkliges und ein ungleichschenkliges), Winkelmesser u. ggf. Kurvenlineale.

- Linienarten:
  - dicke Vollinie (▬, 0.5mm, dunkel) für sichtbare Strecken, Geradenstücke, Körperkanten
  - Strichlinie (-----, 0.3mm, dunkel) für verdeckte Strecken, Linien, Körperkanten
  - dünne Vollinie (___, 0.2mm, hell) für Hilfslinien

3. Vereinfachte Grundkonstruktionen

Zur besseren Übersichtlichkeit von Zeichnungen müssen die üblichen Grundkonstruktionen (Parallelverschiebungen, Senkrechte errichten, Winkel übertragen, Strecken halbieren, . . .) nicht als strenge Zirkel-Lineal-Konstruktion ausgeführt werden, sondern es können z.B. Senkrechte mit Hilfe eines Zeichendreiecks errichtet werden, Strecken mit Hilfe eines skalierten Lineal halbiert werden, Winkel mittels Winkelmesser übertragen werden usw.

4.3 Aufgaben zur Darstellenden Geometrie

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind als Zeichnungen anzufertigen. Hierfür gelten die im „Merkblatt zur Ausführung von Zeichnungen zur Darstellenden Geometrie" angegebenen Festlegungen. Jeder Zeichnung ist eine kurze Konstruktionsbeschreibung beizufügen (Blattrückseite benutzen).

1) Von einem Dreieck seien die kotierten Risse seiner Eckpunkte gegeben: $A = (3,\ 9,\ -3)$, $B = (8,\ 19,\ 7)$, $C = (14,\ 12,\ 1)$.

   Man konstruiere die Spurgerade der durch das Dreieck gegebenen Ebene, den Neigungswinkel dieser Ebene sowie ein zum Originaldreicek ABC kongruentes Dreieck ("wahre Gestalt").

2) Von einem Fünfeck $ABCDE$ sind drei Eckpunkte und die Risse der beiden restlichen Eckpunkte gegeben:

   $A = (6,\ 14,\ 2),\ B = (10,\ 15,\ 3),\ D = (8,\ 19,\ 6),\ C' = (11,\ 18,\ 0),\ E' = (5,\ 17,\ 0).$

   Man konstruiere die wahre Gestalt des Fünfecks!

3) Man bestimme den Riss der Schnittgeraden s zweier Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, die folgendermaßen gegeben sind:

   ε_1 ist die parallel zu der durch die drei Punkte $A = (6,\ 7,\ 0)$, $B = (13,\ 1,\ 0)$, $C = (12,\ 12,\ 4)$ bestimmten Ebene und enthält den Punkt $P = (14,\ 20,\ 3)$,
   ε_2 ist diejenige Ebene, die eine zur Geraden BC parallele Gerade durch den Punkt $Q = (3,\ 23,\ 2)$ als Falllinie besitzt.

4) Ein Haus habe einen T-förmigen Grundriss und sei mit einem Walmdach versehen. Man konstruiere den Riss der First- und Kehllinien des Daches, wenn folgende Eckpunkte gegeben sind:

   Quergebäude: $P_1 = (4, 8, 0)$; $P_2 = (14, 8, 0)$, $P_3 = (4, 14, 0)$

   Längsgebäude: $P_4 = (6, 22, 0)$, $P_5 = (12, 22, 0)$.

   Die Dachneigung des Quergebäudes betrage $\alpha_1 = 30^0$, die des Längsgebäudes $\alpha_2 = 45^0$.

   Ferner konstruiere man die wahre Gestalt des Dachflächenstücks mit der Kante P_1P_2.

5) Für folgende Zweitafelprojektion sei die Rissachse im „Merkblatt"-Koordinatensystem durch $y = 14$ gegeben.

   a) Die Grundfläche $P_1P_2P_3P_4$ eines Würfels $P_1P_2 \dots P_8$ befinde sich in der Grundrissebene ($P_1 = (5, 7)$, $P_2 = (10, 8)$, $P_3 = (9, 13)$). Man zeichne diesen Würfel in Zweitafelprojektion.
   b) Die Ebene ε sei gegeben durch ihre zwei Spurgeraden $s_1 := EF_1$ und $s_2 := EF_2$ mit $E = (1, 14)$, $F_1 = (10, 2)$ und $F_2 = (14, 22)$. Man konstruiere den Schnitt des Würfels mit der Ebene ε ebenfalls in Grund und Aufriss.

6) Ein konvexes Polyeder sei folgendermaßen als Vereinigung eines Quaders und einer vierseitigen Pyramide gegeben: Die vier Ecken der Grundfläche des Quaders mögen in der Grundrissebene liegen und dort bezüglich des „Merkblatt"-Koordinatensystems die Koordinaten $A = (10, 5)$, $B = (11, 7)$, $C = (16,\ 4.5)$, $D = (15,\ 2.5)$ haben, die Höhe des Quaders sei 3. Auf die Deckfläche sei eine vierseitige Pyramide aufgesetzt, ihre Höhe betrage 7, und der Fußpunkt des Lotes von der Pyramidenspitze auf die Deckfläche des Quaders sei deren Mittelpunkt.

   a) Man konstruiere Grund- und Aufriss des aus der Vereinigung von Quader und Pyramide bestehenden Polyeders, die Rissachse sei durch $y = 9$ gegeben.
   b) Man konstruiere in der Aufrissebene einen Seitenriss des Polyeders, so daß die Rissachse durch die Punkte $(4, 9)$ und $(15, 27)$ des Zeichenblattes geht.
   c) Wie b), aber mit Rissachse durch $(0, 16)$ und $(18, 21)$.

   Man mache jeweils die Sichtbarkeitsverhältnisse deutlich!

7) Die Grundfläche eines dreiseitigen Prismas habe die Ecken R, S, T und die parallelen Kanten RU, SV, TW. Ferner habe ein Tetraeder die Ecken A, B, C, D.

   Der Ursprung eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems liege im Zeichenblattpunkt $(0, 14)$, die x- und z-Achsen mögen auf dem linken Zeichenfeldrand liegen (positive x-Richtung nach unten, z- Richtung nach oben), die y-Achse sei die Zeichenfeldgerade $y = 14$. Bezüglich dieses räumlichen Koordinatensystems haben die genannten Punkte folgende Koordinaten:

$R = (7,\ 3.5,\ 4)$, $S = (4,\ 3,\ 8)$, $T = (9,\ 1,\ 6.5)$, $U = (5,\ 17,\ 3)$,

$A = (10,\ 9.5,\ 5.5)$, $B = (5,\ 10.5,\ 10)$, $C = (3,\ 4,\ 3.5)$, $D = (1.5,\ 15,\ 1.5)$.

Man konstruiere Grund- und Aufriss des Kantensystems der Vereinigungsmenge der beiden Polyeder. Man mache jeweils die Sichtbarkeitsverhältnisse deutlich!

Für die Zweitafelprojektionen in 8) und 9) sei die Rissachse im „Merkblatt"-Koordinatensystem durch $y = 14$ gegeben.

8) Es seien $P_1, \ldots, P_6$ die Ecken eines geraden Prismas ($P_1P_4 \parallel P_2P_5 \parallel P_3P_6$), dessen Grundfläche $P_1P_2P_3$ sich in der Grundrissebene befinde und das eine Höhe von 10 cm hat. Es sei ε eine Ebene, die die Punkte P_1 und P_3 enthält und die das Prisma in einem gleichseitigen Dreieck schneidet. Man bestimme die Spurgeraden von ε sowie Grund- und Aufriss des gleichseitigen Dreiecks. Im „Merkblatt"-Koordinatensystem sei $P_1 = (10, 6)$, $P_2 = (11, 12)$, $P_3 = (5, 11)$). Das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist gleichschenklig!

   Hinweis: Umklappung der projizierenden Ebene durch P_1, P_2, P_4 und P_5 !

9) Gegeben sei eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2; es gehe e_1 durch $(0, 0, 0)$ und $(13, 11, 0)$, und e_2 gehe durch $(0, 0, 0)$ und $(0, 16, 7)$. Ferner sei ein Punkt $P = (4, 6, 7)$ gegeben.

   a) Man konstruiere den Grund- und Aufriß des Fußpunktes F des Lotes von P auf ε.

   b) Unter Verwendung von Teil a) konstruiere man Grund- und Aufriß eines Würfels, der durch folgende Eigenschaften festgelegt ist:

      (1) PF ist eine Kante.

      (2) Von F geht eine zur Aufrissebene parallele Würfelkante aus, deren zweiter Endpunkt weiter von der Spur e_1 entfernt ist als F.

10) Ein räumliches kartesisches Koordinatensystem Σ werde in einer orthogonalen Axonometrie so abgebildet, dass das Spurdreieck aus den Punkten (in „Merkblatt"-Koordinaten) $S_1 = (3,\ 12)$, $S_2 = (12,\ 12)$, $S_3 = (7,\ 20)$ besteht.

   Es sei g die Verbindungsgerade der Punkte P_1, P_2, die in bezug auf Σ die Koordinaten $P_1 = (4,\ 1,\ 0)$, $P_2 = (1,\ 3,\ 0)$ haben mögen. Ferner sei l die zu g senkrechte Gerade durch den Koordinatenursprung von Σ, es sei S der Lotfußpunkt $g \cap l$. Schließlich sei T der Punkt mit bezüglich Σ positiver dritter Koordinate, für den TS senkrecht zur x_1-x_2-Ebene von Σ ist und $l(\overline{TS}) = 5\sqrt{2}$ ist.

   Man konstruiere die Bilder von g, l und $\overline{ST}$ in der Axonometrie.

Die Koordinatenangaben in den folgenden Aufgaben beziehen sich auf das „Merkblatt"-Koordinatensystem. Die Rissachse sei in diesem Koordinatensystem durch $y = 14$ gegeben.

11) Ein gerader Kreiskegel mit 9 cm Höhe und dem Grundkreisradius 4 cm stehe so auf der Grundrissebene, dass die Kegelspitze den Punkt $(9,\ 8)$ als Grundriss hat. Der Grundriss der Geraden g verlaufe durch die Punkte $(5,\ 6)$ und $(17,\ 9)$, der Aufriss durch die Punkte $(4,\ 16)$ und $(13,\ 22)$. Man konstruiere Grund- und Aufriss der Schnittpunkte von g mit der Kegelfläche.

   Hinweis: Man benutze eine Ebene durch g und die Kegelspitze.

12) Ein gerader Kreiskegel mit 11 cm Höhe und dem Grundkreisradius 5 cm stehe auf der Grundrissebene; die Kegelspitze habe den Grundriss $(9,\ 7)$. Ein 12 cm langer gerader Kreiszylinder mit Grundkreisradius 4 cm liege so auf der Grundrissebene auf, dass seine Achse senkrecht zur Aufrissebene verläuft und einen kürzesten Abstand von 2 cm zur Kegelachse hat, außerdem mögen die kreisförmigen Seitenflächen des Zylinders von der Kegelachse gleich weit entfernt sein. Man konstruiere Grund- und Aufriss der Schnittkurve von Kegel- und Zylinderfläche.

   Hinweis: Man betrachte eine Reihe von Ebenen durch die Kegelspitze, die parallel zur Zylinderachse sind. Jede solche Ebene liefert bis zu vier Punkten der Schnittkurve.

Inhaltsverzeichnis