B. Külshammer

Ausgabe: 03.12.07
Abgabe: 11.12.-14.12.07

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

Übungsblatt 7

Aufgabe 27 (3)

Berechnen Sie $A^{100}, B^{100}, C^{100}$, wobei A, B, C die folgenden Matrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28 (2+2)

Die Fibonacci-Zahlen (Leonardo Fibonacci, 1170-1250) werden definiert durch:

$$F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$;

(ii) $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$.

Aufgabe 29 (2+2)

(i) Geben Sie zu der folgenden Matrix eine rechtsinverse Matrix an: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) Überprüfen Sie, ob die folgende Matrix invertierbar ist, und geben Sie ggf. die inverse Matrix an:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30 (2+2)

(i) In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei eine Basis a, b, c gegeben. Stellen Sie fest, ob auch $a+b,\ b+c,\ c+a$ eine Basis von V bilden.

(ii) Bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$?
$(1+i, 0, 3+3i);\ (-1+2i, 2i, 3),\ (1+2i, 2i, 3)$.

Aufgabe 31 (1+1+2+2)

Es sei K ein endlicher Körper, $q := |K|$ und V ein K-Vektorraum der Dimension $n < \infty$.
Bestimmen Sie:

(i) Die Anzahl der Vektoren in V.

(ii) Die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von V.

(iii) Die Anzahl der 2-dimensionalen Untervektorräume von V.

(iv) Die Anzahl der k-dimensionalen Untervektorräume von V $\quad (0 \leq k \leq n)$.

Hinweis: Die Übungsblätter finden Sie auch im Internet unter der Adresse:
http://www.mathematik.uni-jena.de/algebra/