B. Külshammer

Ausgabe: 19.11.07
Abgabe: 27.11.-30.11.07

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 (2+2)

Entscheiden Sie, welche der beiden folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind:

(i) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : 2x + y - z = 0\}$;

(ii) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x - yz = 0\}$.

Aufgabe 18 (2+2+2)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Untervektorräume U_1, U_2, U_3 eines Vektorraums V:

(i) $U_1 \subseteq U_3 \Rightarrow U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$ (Dedekind-Identität)

(ii) $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ (Distributivgesetz)

(iii) $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$ (Distributivgesetz)

Aufgabe 19 (2)

Zeigen Sie, dass für Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V stets gilt:
Genau dann ist $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 20 (2)

K sei ein unendlicher Körper, und $U_1, \ldots, U_n$ seien **echte** Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie: $V \neq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Aufgabe 21 (2+2)

(i) Zeigen Sie, dass die Menge $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird, wenn man $f + g$ und af für $f, g \in V, \ a \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}), \\ (af)(x) &:= af(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(ii) Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} G &:= \{f \in V : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}, \\ U &:= \{f \in V : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Untervektorräume von V mit $V = G \oplus U$ sind. (Die Abbildungen in G heißen **gerade**, die in U **ungerade**.)

Hinweis: Die Übungsblätter finden Sie auch im Internet unter der Adresse:
http://www.mathematik.uni-jena.de/algebra/