B. Külshammer

Ausgabe: 12.11.07
Abgabe: 20.11.-23.11.07

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (2+2)

(i) Ist $(\mathfrak{P}(\{1,2,3\}),\cup)$ eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort!

(ii) Gegeben sei eine Gruppe $(G,*)$ mit neutralem Element e, in der $a*a=e$ für alle $a\in G$ gilt. Zeigen Sie, dass $(G,*)$ kommutativ ist.

Aufgabe 14 (2+2+2)

(i) Geben Sie die Additionstabelle und die Multiplikationstabelle für einen Körper mit 3 Elementen an.

(ii) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

(iii) Beweisen Sie den folgenden **Satz von Wilson**:
In einem endlichen Körper ist das Produkt aller von 0 verschiedenen Elemente gleich -1.

Aufgabe 15 (2+2)

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2=i$ in $\mathbb{C}$.

(ii) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^3=1$ in $\mathbb{C}$.

Skizzieren Sie jeweils auch die Lage der Lösungen in der Zahlenebene.

Aufgabe 16 (4)

Auf der Menge $\mathbb{H} := \mathbb{C}^2$ definiert man zwei Verknüpfungen $+,\cdot$ durch

$$(a,b)+(c,d) := (a+c,b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-\bar{b}d, bc+\bar{a}d)$$

$(a,b,c,d\in\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H},+,\cdot)$ alle Eigenschaften eines Körpers außer der Kommutativität der Multiplikation hat. Man nennt $\mathbb{H}$ den **Quaternionen-Schiefkörper**; er wurde 1843 von dem irischen Mathematiker HAMILTON konstruiert.

Hinweis: Die Übungsblätter finden Sie auch im Internet unter der Adresse:
http://www.mathematik.uni-jena.de/algebra/