B. Külshammer

Ausgabe: 14.01.08
Abgabe: 22.01.-25.01.08

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

## Übungsblatt 11

**Aufgabe 48** (2+2)

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$S_n(k) := 1^n + 2^n + \ldots + (k-1)^n.$$

Sicher kennen Sie die Formeln

$$S_0(k) = k-1, \quad S_1(k) = \frac{k(k-1)}{2}, \quad S_2(k) = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6}, \quad S_3(k) = \frac{k^2(k-1)^2}{4}.$$

(i) Zeigen Sie allgemein, dass $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft existieren:

$$S_{n-1}(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(*Hinweis*: Aus der binomischen Formel folgt nämlich:

$$(x+1)^n - x^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i \qquad (x = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Daraus ergibt sich durch Addition:

$$k^n - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} S_i(k).$$

Dies kann man auch als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{n-1}{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{1}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{n-1}(k) \\ S_{n-2}(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ S_0(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^n - 1 \\ k^{n-1} - 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ k-1 \end{pmatrix}$$

Wenden Sie jetzt die Cramersche Regel an.)

(ii) Finden und beweisen Sie Formeln für $S_4(k)$ und $S_5(k)$.

- bitte wenden -

**Aufgabe 49** (2+2)

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Konstruieren Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ ein Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 50** (2)

Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 = 1_n$ diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 51** (2)

Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt:

$$A^2 - \mathrm{spur}(A)A + \det(A)1_2 = 0.$$

**Aufgabe 52** (2+2+2)

(i) Wie hängen für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Eigenwerte von $A$ mit denen von $A^2$ zusammen?

(ii) Wie hängen für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Eigenwerte von $A$ mit denen von $A^\top$ zusammen?

(iii) Wie hängen für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Eigenwerte von $A$ mit denen von $A^{-1}$ zusammen?

*Hinweis:* Die Übungsblätter finden Sie auch im Internet unter der Adresse:
*http://www.mathematik.uni-jena.de/algebra/*