B. Külshammer

Ausgabe: 07.01.08
Abgabe: 15.01.-18.01.08

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

Übungsblatt 10

Aufgabe 43 (2)

Geben Sie zwei quadratische Matrizen an, die äquivalent, aber nicht ähnlich sind.

Aufgabe 44 (2)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ habe bzgl. der Standardbasen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ an, bzgl. denen die Matrix von f folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } r = \mathrm{rg}(f).$$

Aufgabe 45 (2+2+2+2)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden $n \times n$-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

- bitte wenden -

Aufgabe 46 (2)

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass eindeutig bestimmte $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ existieren mit der Eigenschaft, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

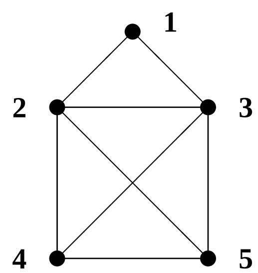
die Bedingungen $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ erfüllt. (Man nennt f **Interpolationspolynom**.)

Aufgabe 47 (2+2+2)

Ein **Graph** ist ein Paar $\Gamma = (V, K)$, das aus einer Menge V und einer Menge K von 2-elementigen Teilmengen von V besteht. Die Elemente in V heißen **Vertizes**, die in K **Kanten** von Γ. Im Fall

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$K = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

kann man sich Γ folgendermaßen veranschaulichen:



Im Fall $\{v, v'\} \in K$ heißen zwei Vertizes v, v' von V **benachbart**. Für $v, w \in V$ ist ein **Pfad** der **Länge** k in Γ von v nach w eine endliche Folge von Vertizes der Form

$$v = v_0, v_1, \dots, v_k = w,$$

wobei v_{i-1} und v_i für $i = 1, \dots, k$ benachbart sind. Man nennt Γ **zusammenhängend**, falls je zwei Vertizes in Γ durch einen Pfad verbunden sind. Ist $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, so definiert man die **Zusammenhangsmatrix** $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von Γ durch

$$c_{ij} := 1,\ \text{falls } i, j \text{ benachbart}\ ; \quad c_{ij} := 0 \text{ sonst.}$$

Zeigen Sie:

(i) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist die Anzahl der Pfade der Länge k in Γ von v_i nach v_j gleich dem Eintrag in C^k an der Position (i, j).

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Pfade der Länge $\leq k$ in Γ von v_i nach v_j gleich dem Eintrag in $1_n + C + C^2 + \ldots + C^k$ an der Position (i, j).

(iii) Γ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle Einträge in $1_n + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}$ positiv sind.

Hinweis: Die Übungsblätter finden Sie auch im Internet unter der Adresse:
http://www.mathematik.uni-jena.de/algebra/