

Übungen zur Vorlesung Mathematik (Lineare Algebra)

Blatt 8

Aufgabe 1. (2+2+2+2 Punkte) Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 3 & 11 & 5 & 4 & 2 & 19 & 12 & 9 & 15 & 7 & 1 & 10 & 18 & 20 & 14 & 8 & 16 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

- (i) Stellen Sie σ dar als Produkt von Zyklen.
- (ii) Stellen Sie σ dar als Produkt von Transpositionen.
- (iii) Berechnen Sie $\text{sgn}(\sigma)$.
- (iv) Berechnen Sie $\text{ord}(\sigma)$, also die Ordnung von σ , das ist die kleinste natürliche Zahl $k \geq 1$, für die $\sigma^k = \text{Id}$ gilt.

Aufgabe 2. (4 + 2 + 2 Punkte) Betrachtet sei der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(e_1) = (1, 1, 0)^T$, $f(e_2) = (0, 1, 1)^T$, $f(e_3) = (1, 0, 1)^T$, worin e_1, e_2, e_3 die Standard-Basis von \mathbb{R}^3 ist. Weiter seien die Vektoren $v_1 = (-1, 2, -3)^T$, $v_2 = (3, -2, 1)^T$, $v_3 = (1, 1, 1)^T$ gegeben.

- (i) Bestimmen Sie die Matrix A_f von f bezüglich der Standard-Basis e_1, e_2, e_3 des \mathbb{R}^3 und berechnen Sie $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ sowie $\det(A_f)$.
- (ii) Berechnen Sie das Volumen des Parallelotops $P(v_1, v_2, v_3)$ und das Volumen des Parallelotops $f(P) = P(f(v_1), f(v_2), f(v_3))$.
- (iii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Volumina von P und $f(P)$ sowie $\det(A_f)$?

Aufgabe 3. (4 Punkte) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass für diese Matrizen der Multiplikationssatz für Determinanten erfüllt ist:
 $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$