

Übungen zur Vorlesung Mathematik (Lineare Algebra)

Blatt 4

Aufgabe 1. (2 Punkte) Gegeben seien die folgenden Vektoren im \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (1, 2, -3)$$

$$v_2 = (4, -2, 2)$$

$$v_3 = (2, -6, 8)$$

$$v_4 = (1, -3, 4)$$

$$v_5 = (3, 4, 5)$$

Bestimmen Sie eine Teilmenge B von $\{v_1, \dots, v_5\}$ so, dass B eine Basis des Vektorraums \mathbb{R}^3 ist.

Aufgabe 2. (3 + 4 + 3 Punkte) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Ferner seien U_1 und U_2 Unterräume von V .

(i) Die Summe $U_1 + U_2$ von U_1 und U_2 ist definiert als

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2$ der kleinste Unterraum von V ist, der U_1 und U_2 enthält!

(ii) $U_1 + U_2$ heißt *direkte Summe von U_1 und U_2* , falls $U_1 \cap U_2 = 0$ gilt. Man schreibt dann auch $U_1 \oplus U_2$ statt $U_1 + U_2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ genau dann gilt, wenn sich jedes $v \in V$ auf eindeutige Weise als Summe $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ darstellen lässt.

(iii) Zeigen Sie: Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so gilt $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

(Hinweis: Zeigen Sie: Ist B_1 eine Basis von U_1 und B_2 eine Basis von U_2 , so ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V .)

Aufgabe 3. (3 + 2 Punkte) Es sei $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von \mathbb{R}^3 ist, und bestimmen Sie eine Basis von U .

(ii) Geben Sie einen Unterraum W von \mathbb{R}^3 mit $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ an.

Aufgabe 4. (2 + 4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3)$ definierte Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(ii) Bestimmen Sie $\text{Ker}(f)$ und $\text{Im}(f)$.