

Übungen zur Algebra I

Blatt 14

Aufgabe 59

Zeigen Sie, dass eine Gruppe genau dann endlich ist, wenn sie nur endlich viele Untergruppen enthält.

Aufgabe 60

Eine Gruppe der Ordnung 55 operiere auf einer Menge mit 39 Elementen. Zeigen Sie, dass es mindestens einen Fixpunkt gibt.

Aufgabe 61

Wahrscheinlich kennen Sie das folgende Spiel. Es besteht aus 15 Quadraten, die mit den Zahlen $1, \dots, 15$ beschriftet sind, und einem leeren Quadrat. Diese werden in 4 Reihen von je 4 Quadraten angeordnet. Ein erlaubter Zug ist das Verschieben eines beschrifteten Quadrats auf das benachbarte Feld, falls dieses leer ist. Kann man so von

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

zu

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

gelangen?

Aufgabe 62

Zeigen Sie, dass die invertierbaren Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

eine auflösbare Untergruppe von $GL(3, \mathbb{C})$ bilden.

Aufgabe 63

Zeigen Sie, dass \mathbb{Q} keine echte Untergruppe von endlichem Index enthält.