Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils die JACOBIsche Matrix!

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(x_1\,,x_2) = (e^{x_1+x_2}\,, e^{x_1-x_2})\,.$

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(x_1\,,x_2) = (\sin(x_1-x_2)\,,\cos(x_1-x_2))\,.$

c) $f:(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch
$f(r,\varphi,\Theta) = (r\cos\varphi\,\sin\Theta\,,\ r\sin\varphi\,\sin\Theta\,,\ r\cos\Theta)\,.$

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x_1,x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\,,\ \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)\,, \quad (x_1,x_2)\neq(0,0)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und bestimmen Sie die JACOBIsche Matrix $Mf'(x)\,,\ x\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\,.$

b) Berechnen Sie $\det(Mf'(x))\,,\ x\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\,.$

c) Weisen Sie nach, dass f invertierbar ist, und ermitteln Sie die zu f inverse Funktion $f^{-1}\,.$

d) Bestimmen Sie $f(Uj)\,,\ j=1,2,3\,,$ für

$U_1 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2+x_2^2 < 1\}\,,$
$U_2 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2 = 1\}\,,$
$U_3 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2 > 1\}\,.$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $f(x_1,x_2) = x_1\log(x_1x_2)\,,\ x_1>0\,,x_2>0\,.$

Berechnen Sie $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}\,.$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ermitteln Sie jeweils $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2\,,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = e^{3x_1 + 4x_2} \cos 5x_3\,,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}\,,\ (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Notieren Sie jeweils die TAYLORsche Formel an der Stelle x mit dem Restglied $(k + 1)$-ter Ordnung.

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2 - 7\,,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,$
$x = (0, 0)\,,\ k = 8$,

b) $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}\,,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,$
$x = (0, 0)\,,\ k = 2$,

c) $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}\,,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,\ x_1 > 0\,,$
$x = (1, 1)\,, k = 1\,.$