

## Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

### Blatt 7

#### **Aufgabe 1** (4 Punkte)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche

- a) für  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{1-x^2} \leq y \leq 4, -1 < x < 1\}$ ,
- b) innerhalb der Astroide  $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$ .

#### **Aufgabe 2** (3 Punkte)

Die Funktion  $f(x)$  sei stetig für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $a$  sei eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Funktion  $g(x) = \max\{f(x), a\}$  ebenfalls stetig ist.

#### **Aufgabe 3** (3 Punkte)

Es sei  $f$  eine stetige Selbstabbildung eines metrischen Raumes  $[\mathbb{M}, \rho]$  und es habe für wenigstens ein Element  $x_0 \in \mathbb{M}$  die Folge  $(x_n)$  mit  $x_1 = f(x_0)$  und  $x_{n+1} = f(x_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  einen Grenzwert  $x \in \mathbb{M}$ . Zeigen Sie, dass dieses Element  $x \in \mathbb{M}$  dann ein Fixpunkt von  $f$  ist.

#### **Aufgabe 4** (3 Punkte)

Die Funktion  $f(x)$  sei stetig für  $x \geq a$  und besitze einen endlichen Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie, dass  $f$  dann auf  $[a, \infty)$  beschränkt sein muss.

#### **Aufgabe 5** (5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f(x)$  in den angegebenen Intervallen auf gleichmäßige Stetigkeit:

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, 0 < x < 1$
- b)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{10} \leq x < 1$
- c)  $f(x) = \sqrt{x}, 1 \leq x < \infty$
- d)  $f(x) = x \sin x, 0 \leq x < \infty$
- e)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, 0 < x \leq \pi$

#### **Aufgabe 6** (6 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall  $[0, 2]$ :

- a)  $f_n(x) = \sin(nx)$ ,
- b)  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ ,
- c)  $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$ .