

Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 6

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion.

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$, $x < \frac{1}{3}$,

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}$, $|x| < \frac{1}{2}$,

c) $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

d) $f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$,

e) $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x > 1$,

f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

g) $f(x) = x e^x$, $x \in \mathbb{R}$,

h) $f(x) = \log x$, $x > 0$,

i) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$,

j) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R}$,

k) $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-x-2}$, $x \neq -1, x \neq 2$,

l) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$,

(Hinweis: $\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$)

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_{-1}^1 (x^2+1) x \, dx$,

b) $\int_1^8 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2} \, dx$,

c) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1}$,

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-|x|}, |x| < 1, \text{ und } g(x) = 2, |x| < 1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$. Zeigen Sie

- a) $L'(x) = 1/x$,
- b) L ist streng monoton wachsend,
- c) $L(xy) = L(x) + L(y)$,
- d) $L(e^x) = x \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ die Integrale

- a) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$,
- b) $\int_{-1}^1 (1+x)^m(1-x)^n dx$,

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie diese gegebenenfalls

- a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$,
- b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$, $a > 0$,
- c) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$,
- d) $\int_0^{\infty} \cos x dx$,
- e) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$,
- f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$,
- g) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx$.