Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 5

Aufgabe 1 (14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{8-x}{\sin \frac{\pi}{8} x}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\log x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\ 2x}{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \log(1+x)\ \mathrm{ctg}\, x$ j) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ \log x$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x - x^2\ \log(1+\frac{1}{x})\right)$ n) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $a < b$ und $x_0 \in (a,b)$. Es sei weiter $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist, und es existiere der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{x\to x_o} f'(x)\ (\alpha \in \mathbb{R})\,.$$

Beweisen Sie, dass die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, und dass $f'(x_0) = \alpha$ gilt.

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 50,\ x \in \mathbb{R}$, b) $f(x) = x(3-x)^2,\ x \in \mathbb{R}$,

c) $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}},\ x \neq 0$, d) $f(x) = e^x\ \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,

e) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2},\ x \neq 0$, f) $f(x) = x^4\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$,

g) $f(x) = x^3(1+x)^\alpha,\ x > -1\ (\alpha \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

(Nullstellen, Verhalten bei $-\infty,\ -1,\ 1,\ \infty$, lokale Extremwerte, Monotonie, Wertebereich).
Skizzieren Sie den Graph von f.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Notieren Sie die Taylorsche Formel.

a) $f(x) = x^3\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ a = 0\ ,\ n = 4$,

b) $f(x) = x^3\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ a = 1\ ,\ n = 4$,

c) $f(x) = e^{\sin x}\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ a = 0\ ,\ n = 2$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, in eine Taylorreihe $(a = 3)$. Für welche x ist diese Taylorreihe konvergent?

Sie finden die Übungsblätter auch auf dem WWW-Server der Fakultät für Mathematik und Informatik unter der URL
`http://www.minet.uni-jena.de/algebra/`