Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 4

Aufgabe 1 (13 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 5x^{15} - x^2 + \frac{1}{3}x - 2,\ x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} - 2x^7 + \frac{3}{x^2\sqrt{x}},\ x > 0$,

c) $f(x) = x^3 \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,

d) $f(x) = (10x^2 - 1)e^{3x},\ x \in \mathbb{R}$,

e) $f(x) = x^2 e^x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$,

f) $f(x) = \frac{5x^2+x-2}{x^2+7},\ x \in \mathbb{R}$,

g) $f(x) = (3x + 1)^7,\ x \in \mathbb{R}$,

h) $f(x) = 3\, e^{2\cos^3 x},\ x \in \mathbb{R}$,

i) $f(x) = 3\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x,\ 0 < x < \pi$,

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}},\ 0 < x < 1$,

k) $f(x) = \log\,(\sin x),\ 0 < x < \pi$,

l) $f(x) = \log\ \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$,

m) $f(x) = \log\,(\log(\log x)),\ x > e$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die Funktionen f an der Stelle x_0 differenzierbar sind.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ , & x \le 1, \\ x^2 - 1\ , & x > 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1,$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ , & 0 < x < 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ , & x \ge 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1.$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Ermitteln Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha\ \sin\frac{1}{x}\ , & x \ne 0, \\ 0\ , & x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist. für welche dieser Zahlen α ist f'_α stetig ?

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^{\sin x} \quad , \; x > 0,$

b) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}} \quad , \; x > \frac{2}{\pi},$

c) $f(x) = \log_x e \quad , \; x > 1.$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Weisen Sie nach, dass die folgenden Beziehungen gelten.

a) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \; , \; x \in \mathbb{R},$

b) $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arc}\operatorname{tg} x < x \; , \; x > 0.$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Es sei $f(x) = \operatorname{ctg} h \, x \; , \; 0 < x < \infty.$

a) Zeigen Sie, dass die zu f inverse Funktion f^{-1} existiert $(\operatorname{ar}\operatorname{ctg} h := f^{-1})$.

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\operatorname{ar}\operatorname{ctg} h$.

Sie finden die Übungsblätter auch auf dem WWW-Server der Fakultät für Mathematik und Informatik unter der URL
`http://www.minet.uni-jena.de/algebra/`