K. Haberland

Ausgabe: Woche vom 30.04.2007
Abgabe: Woche vom 07.05.2007

Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 2

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge (a_n).

a) $a_n = \frac{n^2-1}{3-n^3},\ n \in \mathbb{N}$,

b) $a_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n-2)},\ n \in \mathbb{N}$,

c) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2},\ n \in \mathbb{N}$,

d) $a_n = \frac{3^{2n+1}-7}{9^n+4},\ n \in \mathbb{N}$,

e) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\ ,\ n \in \mathbb{N}$,

f) $a_n = n\left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$,

g) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n},\ n \in \mathbb{N}^*$,

h) $a_n = \sqrt[n]{2n^3-3n^2+15},\ n \in \mathbb{N}^*$,

i) $a_n = \frac{n!}{n^n},\ n \in \mathbb{N}$,

j) $a_n = \frac{2^n \cdot 3^{2n}}{n!},\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei (a_n) die durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, n \in \mathbb{N}$, definierte Folge. Untersuchen Sie, ob (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert dieser Folge.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $[x]$ die größte ganze Zahl g mit $g \le x$. Ermitteln Sie jeweils die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(a_n - [a_n])_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = \frac{1}{7}\,4^n,\ n \in \mathbb{N}$,

b) $a_n = 2^{-n}3^{2^n},\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der nachstehenden Reihen.

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$,

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$,

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$,

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$,

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3+(-1)^n}{2}}}$.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die durch $b_n = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ definierte Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ebenfalls gegen a konvergiert.