

## Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

### Blatt 10

#### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 - 4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

- a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von  $f$ .
- b) Skizzieren Sie die Menge  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 0\}$ .

#### Aufgabe 2 (3 Punkte)

Ermitteln Sie jeweils alle lokalen Extrema der folgenden Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a)  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 + 1, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$
- b)  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$
- c)  $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2^2(1 - x_1 - x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

#### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Berechnen Sie jeweils das Integral  $\int_E x_1 x_2 dx_1 dx_2$ .

- a)  $E = [0, a] \times [0, a],$
- b)  $E = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a - x_1\},$
- c)  $E = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq \sqrt{a^2 - x_1^2}\}.$

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  sei

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : a \leq x_1 \leq b, \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq f(x_1) \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie jeweils das Volumen von  $E$ .

- a)  $f(x_1) = \frac{r}{h}x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq h \quad (r > 0, h > 0),$
- b)  $f(x_1) = \sin x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq \pi.$

#### Aufgabe 5 (3 Punkte)

Es sei  $0 < r < R < \infty$ . Es sei  $T \subset \mathbb{R}^3$  der Torus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0, x_1^2 + (x_2 - R)^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

um die  $x_1$ -Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von  $T$ .