K. Haberland

Ausgabe: Woche vom 23.04.2007
Abgabe: Woche vom 30.04.2007

Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

(b) Untersuchen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n! > 2^n$ gilt.

(c) Sei $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$$

gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Es seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$. Zeigen Sie mit Hilfe des Axioms von ARCHIMEDES, dass das Intervall (a, b) eine irrationale Zahl enthält!

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung f von dem Intervall $(0, 1]$ auf das Intervall $(0, 1)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Lösen Sie die folgenden Ungleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $|x - 2| + |x + 1| \geq 5$,

b) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 < 0$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$$

definiert ist, und lösen Sie diese Gleichung in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum bzw. das Infimum dieser Mengen.

a) $\{x : x^2 - 10x \leq 24\}$,

b) $\{x : x^2 + 2x + 2 > 5,\ x < 0\}$,

c) $\{x : x = 1 - \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$,

d) $\{x : x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$,

e) $\{x : x = n + (-1)^n (n + \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\}$.