

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 9

Aufgabe 38

Zeigen Sie, dass für jedes Idempotent e in einem Ring R gilt:

$$J(eRe) = eJ(R)e = eRe \cap J(R).$$

Aufgabe 39

Zeigen Sie, dass das von 2 und $1 + \sqrt{-5}$ erzeugte Ideal I im Ring $R := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ ein projektiver R -Modul ist. (Allgemeiner ist jedes Ideal I eines Ganzheitsrings R in einem algebraischen Zahlkörper K ein projektiver R -Modul.)

Aufgabe 40

Berechnen Sie die injektive Hülle des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 41

Zeigen Sie, dass für jeden Ring R und jeden projektiven R -Modul P gilt:

$$\text{Rad}(P) = (\text{Rad } R)P.$$

Aufgabe 42

Zeigen Sie, dass für einen Ring R ein R -Modul P genau dann projektiv ist, wenn für jede exakte Folge von R -Homomorphismen $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ die entsprechende Folge von \mathbb{Z} -Homomorphismen $\text{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{f_P} \text{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g_P} \text{Hom}_R(P, N)$ exakt ist.