

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 7

Aufgabe 29

Gegeben sei ein Ring R mit einer Zerlegung $R = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ in Linksideale L_1, \dots, L_n . Zeigen Sie, dass Idempotente e_1, \dots, e_n in R mit $L_i = Re_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ existieren.

Aufgabe 30

Gegeben seien Idempotente e_1, \dots, e_n in einem Ring R mit $u := e_1 + \dots + e_n \equiv 1 \pmod{J(R)}$ und $e_i e_j \equiv 0 \pmod{J(R)}$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie:

- (i) $u \in U(R)$
- (ii) $R = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_n$.
- (iii) Für $i = 1, \dots, n$ ist $f_i := u^{-1}e_i$ ein Idempotent in R mit $f_i \equiv e_i \pmod{J(R)}$.
- (iv) Für $i \neq j$ ist $f_i f_j = 0$.
- (v) $f_1 + \dots + f_n = 1$.

Aufgabe 31

Gegeben sei ein Element a in einem Ring R , das mindestens zwei Linksinverse besitzt. Zeigen Sie, dass a unendlich viele Linksinverse hat.

Aufgabe 32

Berechnen Sie $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 33

Gegeben seien nilpotente Ideale (Nilideale) I, J in einem Ring R . Zeigen Sie, dass $I + J$ ein nilpotentes Ideal (Nilideal) in R ist.