B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 26.04.06
Abgabe: 02.05.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 2

Aufgabe 6

(i) Bestimmen Sie das Zentrum des Gruppenrings RG einer Gruppe G über einem kommutativen Ring R.

(ii) Berechnen Sie das Zentrum des Quaternionen-Schiefkörpers $\mathbb{H}$.

Aufgabe 7

Gegeben sei ein Idempotent e in einem Ring R.

(i) Zeigen Sie, dass eRe ein Teilring von R mit Einselement e ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $I \cap eRe$ für jedes Ideal I in R ein Ideal in eRe ist.

(iii) Untersuchen Sie die Abbildung $I \mapsto I \cap eRe$ zwischen der Menge der Ideale von R und der Menge der Ideale von eRe [Injektivität, Surjektivität, Verträglichkeit mit $\cap,\ +,\ \cdot$].

Aufgabe 8

Seien R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale I in R und der Menge der Ideale J in $R^{n\times n}$.

Aufgabe 9

Seien R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen einen unitären Teilring T von $R^{n\times n}$ bilden.

(ii) Beweisen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen mit lauter Nullen auf der Hauptdiagonale ein Ideal I in T bilden.

(iii) Berechnen Sie I^m für $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10

(i) Zeigen Sie, dass der Quaternionen-Schiefkörper $\mathbb{H}$ eine $\mathbb{R}$-Basis $1, I, J, K$ mit $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ und $IJ = K = -JI$ hat.

(ii) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form

$$(a1 + bI + cJ + dK)/2 \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 2)$$

einen Teilring R von $\mathbb{H}$ bilden.

(iii) Bestimmen Sie $U(R)$.
