B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 05.07.06
Abgabe: 11.07.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 12

Aufgabe 51

Geben Sie ein Beispiel an für einen Ring R, einen R-Rechtsmodul M und einen R-Linksmodul N mit

$$M \otimes_R N \neq \{m \otimes n : m \in M, n \in N\}.$$

Aufgabe 52

Ist $\mathbb{Q}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul?

Aufgabe 53

Gegeben seien Ideale $I_1, \ldots, I_n$ in einem Ring R mit $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$. Zeigen Sie, dass paarweise orthogonale Idempotente $e_1, \ldots, e_n \in Z(R)$ existieren mit $e_1 + \ldots + e_n = 1$ und $I_j = Re_j = e_jR$ für $j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 54

Gegeben seien ein Ring R und zwei R-Moduln M, N. Ein R-Homomorphismus $f : M \to N$ heißt **projektiv**, falls ein projektiver R-Modul P und Elemente $g \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$, $h \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ mit $f = h \circ g$ existieren:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Man sagt auch, dass f durch einen projektiven R-Modul **faktorisiert**. Wir setzen:

$$\mathrm{Hom}_R^{pr}(M, N) := \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) : f \text{ projektiv}\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Hom}_R^{pr}(M, N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

(ii) Für jeden R-Modul L und alle $u \in \mathrm{Hom}_R(L, M), v \in \mathrm{Hom}_R(N, L), f \in \mathrm{Hom}_R^{pr}(M, N)$ ist $f \circ u \in \mathrm{Hom}_R^{pr}(L, N)$ und $v \circ f \in \mathrm{Hom}_R^{pr}(M, L)$.

(iii) $\mathrm{End}_R^{pr}(M)$ ist ein Ideal in $\mathrm{End}_R(M)$.

(iv) M ist projektiv $\Leftrightarrow \mathrm{id}_M$ ist projektiv.

Aufgabe 55

Geben Sie bis auf Isomorphie alle endlich erzeugten unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-Moduln an. (Erinnern Sie sich dazu an den Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen, oder schlagen Sie ihn in einem Algebra-Buch nach.)