B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 28.06.06
Abgabe: 04.07.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 11

Aufgabe 47

(i) Berechnen Sie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(k\mathbb{Z}, l\mathbb{Z})$ für $k, l \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist $\mathbb{Q}$ ein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul?

(iii) Finden Sie einen einfachen $\mathbb{Z}$-Modul ohne projektive Decke.

Aufgabe 48

Gegeben seien ein streng unzerlegbares Idempotent e in einem Ring R und eine Familie $(I_j)_{j \in J}$ von Idealen in R mit $e \in \sum_{j \in J} I_j$. Zeigen Sie, dass ein $j \in J$ mit $e \in I_j$ existiert.
(Diese Aussage bezeichnet man manchmal als **Rosenbergs Lemma**.)

Aufgabe 49

Für einen Ring R sei das folgende kommutative Diagramm von R-Homomorphismen mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g"] & N \arrow[r, "g'"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Konstruieren Sie einen R-Homomorphismus $\delta : \mathrm{Ker}\, d'' \to \mathrm{Koker}\, d'$ derart, dass die folgende Sequenz von R-Homomorphismen exakt ist:

$$\mathrm{Ker}\, d' \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d'' \xrightarrow{\delta} \mathrm{Koker}\, d' \longrightarrow \mathrm{Koker}\, d \longrightarrow \mathrm{Koker}\, d''\,;$$

dabei seien die übrigen Abbildungen kanonisch.
(Hinweis. Diese Aussage ist auch als **Schlangen-Lemma** bekannt. Für einen R-Homomorphismus $h : A \to B$ ist $\mathrm{Koker}\, h := B/h(A)$ der **Kokern** von h.)

Aufgabe 50

Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring R das Radikal des Polynomrings $R[X]$ in einer Unbestimmten X ein Nilideal ist.