

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 10

Aufgabe 43

Zeigen Sie, dass für jeden Ring R und jedes kommutative Diagramm von R -Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

mit exakten Zeilen gilt:

- (i) Sind α, γ und f' injektiv, so ist auch β injektiv.
- (ii) Sind α, γ und g surjektiv, so ist auch β surjektiv.
- (iii) Ist β injektiv und sind α und g surjektiv, so ist γ surjektiv.
- (iv) Ist β surjektiv und sind f' und γ injektiv, so ist α surjektiv.

Aufgabe 44

Zeigen Sie, dass für jeden Ring R und jedes kommutative Diagramm von R -Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E' \end{array}$$

mit exakten Zeilen gilt:

- (i) Ist α surjektiv und sind β und δ injektiv, so ist γ injektiv.
- (ii) Ist ε injektiv und sind β und δ surjektiv, so ist γ surjektiv.
- (iii) Sind $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ bijektiv, so ist auch γ bijektiv.

Aufgabe 45

Beweisen Sie, dass für Idempotente e, f in einem Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) $Re \simeq Rf$.
- (2) $Re/J(R)e \simeq Rf/J(R)f$.
- (3) $eR/eJ(R) \simeq fR/fJ(R)$.
- (4) $eR \simeq fR$.

Aufgabe 46

Zeigen Sie, dass jeder projektive Modul P über einem Ring R einen maximalen Untermodul besitzt.