K. Haberland
G. Horn

Ausgabe: Woche vom 03. 07. 2006
Abgabe: Woche vom 10. 07. 2006

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. (6 Punkte) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Finden Sie eine orthogonale Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2. (2+5 Punkte) Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller Polynome, deren Grad höchstens 2 ist.

(i) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : V \to V, \;\; P \mapsto P'$ nicht diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $g : V \to V, \;\; P \mapsto (X-1)P' - P$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis von V, bzgl. der die Matrix von g Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei V ein komplexer Vektorraum und $f : V \to V$ eine unitäre Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $|\lambda| = 1$.

(ii) Sind x und y Eigenvektoren von f zu unterschiedlichen Eigenwerten, so sind x und y zueinander orthogonal.