Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 — Übungsblatt 1

Abgabe: am Mi 26.04.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Sei k ein Körper, sei R der Ring $M_n(k)$, und sei M der R-Modul k^n mit der üblichen Modulstruktur.

a) (3 P.) Sei $v \in M$ ein beliebiger Vektor $\neq 0$. Zeigen Sie, dass $Rv = M$ gilt, d.h. v erzeugt den Modul M.

b) Nun sei $A \in R$ eine beliebige Matrix $\neq 0$. Sei $I = (A)$, das (doppelseitige) Ideal in R, das durch A erzeugt wird. Zeigen Sie: es ist $I = R$.

Aufgabe 2: (4 P.) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sei $R = \mathbb{R}[X]$, und sei $M = \mathbb{R}^4$, ein R-Modul durch $p(X)v := p(A) \cdot v$. Bestimmen Sie möglichst alle Untermoduln von M.

Aufgabe 3: (2 P.) Angenommen, M ist ein R-Modul und es gibt $0 \neq r \in R$ und $0 \neq m \in M$ mit $rm = 0$. Zeigen Sie: r hat kein Linksinverses, d.h. es gibt kein $s \in R$ mit $sr = 1$.

Aufgabe 4: (3 P.) Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die R-Moduln $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ und M isomorph sind.

Aufgabe 5: Sei R ein Ring $\neq 0$ und M ein R-Modul. Ein Element $m \in M$ heißt ein Torsionselement, wenn es ein $0 \neq r \in R$ gibt derart, dass $rm = 0$ ist. Man setzt

$$\mathrm{Tor}(M) := \{m \in M \mid m \text{ ein Torsionselement}\}.$$

a) (4 P.) Ist R ein Integritätsbereich, so ist $\mathrm{Tor}(M)$ ein Untermodul von M.

b) Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathrm{Tor}(M)$ kein Untermodul von M ist. *Ich kenne ein Beispiel mit R kommutativ und $M = R$.*

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 2

Abgabe: am Mi 03.05.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 P.) Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $I \lhd R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

a) $IM = \{i_1 m_1 + \cdots i_n m_n \mid n \geq 0,\, i_j \in I,\, m_j \in M\}$ ist ein Untermodul von M.

b) Der Quotientenmodul M/IM ist ein Modul über den Quotientenring R/I.

Aufgabe 2: (4 P.) Sei k ein Körper und R der Polynomring $R = k[X_1, X_2, \ldots]$ in abzählbar vielen Unbestimmten. Sei $I \lhd R$ das sogenannte Augmentationsideal $I = (X_1, X_2, \ldots)$. Beweisen Sie die Aussage aus der Vorlesung, dass I weder als Ideal in R noch als Untermodul von R endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3: (4 P.) Finden Sie eine Basis e_1, e_2, e_3 für den freien $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ derart, dass $e_1 = (12, 15, 50)$ ist.

Aufgabe 4: (4 P.) Sei F der freie $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und $M \subseteq F$ der Untermodul, der von $(2, 3, 0)$, $(0, 1, 1)$ und $(3, 1, -1)$ erzeugt wird. Finden Sie eine Basis für F derart, dass bestimmte Vielfachheiten dieser Basis eine Basis von M sind.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 3

Abgabe: am Mi 10.05.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Sei R ein Ring. Die folgenden Aussagen wurden bereits in der Vorlesung benutzt, z.T. stillschweigend. Weisen Sie sie nach.

a) (2 P.) Sind M_1, M_2 zwei R-Moduln und $U_1 \subseteq M_1$, $U_2 \subseteq M_2$ zwei Untermoduln, so ist $U_1 \oplus U_2$ ein Untermodul von $M_1 \oplus M_2$, und $(M_1 \oplus M_2)/(U_1 \oplus U_2) \cong (M_1/U_1) \oplus (M_2/U_2)$.

b) (2 P.) Jeder zyklischer R-Modul ist zu einem Modul der Art R/I isomorph, wobei I ein Linksideal in R ist.

Aufgabe 2: (4 P.) Wieviele Möglichkeiten gibt es, den $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2$ als eine direkte Summe $A \oplus B$ zu zerlegen, wobei A, B Untermoduln sind, $\mathrm{Tor}(A) = A$ gilt, und B frei ist?

Eine andere Formulierung derselben Aufgabe: Sind die Untermoduln A, B eindeutig durch die Bedingungen

$$M = A + B, \quad A \cap B = \{0\}, \quad A = \mathrm{Tor}(A), \quad B \text{ ist ein freier Modul}$$

bestimmt? Wenn nicht, wie viele mögliche Paare A, B gibt es?

Aufgabe 3: Finden Sie die invarianten Faktoren von $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3$ (1 P.) und von $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/7$ (2 P.). Beschreiben Sie dann die allgemeine Vorgehensweise, um die invarianten Faktoren aus den Elementarteilern zu gewinnen (2 P.).

Aufgabe 4: (3 P.) Sei R ein Integritätsbereich, sei M ein R-Modul, sei $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem für M, und sei $b_1, \dots, b_m$ ein System R-linear unabhängiger Elemente aus M. Zeigen Sie: es ist $m \leq n$.

Aufgabe 5: Ein Ring R bzw. ein Modul M heißt *artinsch*, wenn die Ideale in R bzw. die Untermoduln von M die absteigende Kettenbedingung (DCC) erfüllen:

> Sind $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots$ Ideale bzw. Untermoduln, so gibt es ein n_0 derart, dass $X_n = X_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$.

Ist der Polynomring $\mathbb{C}[X]$ artinsch?

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 4

Abgabe: am Mi 17.05.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 P.) Die abelsche Gruppe G wird von den Elementen a, b, c, d erzeugt, die die folgenden Relationen erfüllen: $3b + 2c + 8d = 0$, $5a + b + 8d = 4c$, $b + 4c = 2a + 8d$, $-a + 3b + 2c + 8d = 0$. Bestimmen Sie die invarianten Faktoren und die Elementarteiler von G.

Aufgabe 2: Sei R der Unterring $R = \{p \in \mathbb{Q}[X] \mid p(0) \in \mathbb{Z}\}$ des $\mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) (2 P.) Für alle $p, q \in R$ ist das Ideal $(p, q) \lhd R$ ein Hauptideal. *Hinweis*: Induktion über $\operatorname{grad}(p) + \operatorname{grad}(q)$. Achten Sie insbesondere auf den Fall $\operatorname{grad}(p) = \operatorname{grad}(q)$.

b) (2 P.) Das Ideal $I = (X/2, X/4, X/8, \dots, X/2^n, \dots) \lhd R$ ist kein Hauptideal.

c) (1 P.) Jedes e.e. Ideal in R ist ein Hauptideal, aber R ist nicht noethersch.

Aufgabe 3: Wir zeigen, dass der Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ noethersch aber nicht faktoriell ist. Hierfür benutzen wir die Normabbildung $N(a+b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$.

a) Die Elemente 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ sind alle irreduzibel in R. Dieser Ring ist nicht faktoriell.

b) (2 P.) Ist $\{0\} \neq I \lhd R$, so hat der Quotientenring R/I nur endlich viele Elemente. *Hinweis*: Ist $0 \neq a \in I$, dann $N(a) \in I \cap \mathbb{N}$.

c) (2 P.) R ist noethersch.

Ist R bezüglich der Norm N ein euklidischer Ring?

Aufgabe 4: Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, und sei $x \in R$ weder 0 noch eine Einheit. Zeigen Sie:

a) (2 P.) x hat einen irreduziblen Faktor.

b) (1 P.) x hat eine Faktorisierung als Produkt von irreduziblen Elementen.

Aufgabe 5: Finden Sie einen noetherschen Ring mit der folgenden Eigenschaft: für jedes $n \geq 0$ gibt es eine echt aufsteigende Kette $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n$ von Idealen in R.

Aufgabe 6: Sei R ein Hauptidealring und M ein e.e. R-Modul. Zeigen Sie: Sind F, F' zwei freie R-Moduln vom endlichen Rang und $N \subseteq F$, $N' \subseteq F'$ Untermoduln derart, dass $F/N \cong F'/N' \cong M$ gilt, dann ist $\operatorname{Rang}(F) + \operatorname{Rang}(N') = \operatorname{Rang}(F') + \operatorname{Rang}(N)$.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 5

Abgabe: am Mi 24.05.2006 in der Vorlesung.

Eine ganze algebraische Zahl ist eine algebraische Zahl, die über $\mathbb{Z}$ ganz ist.

Aufgabe 1: (2 P.) Seien S_1, S_2 zwei kommutative Erweiterungsringe des Rings R, und sei $f\colon S_1 \to S_2$ ein Homomorphismus von R-Algebren. Zeigen Sie: ist $\alpha \in S_1$ ganz über R, dann ist auch $f(\alpha)$ ganz über R.

Aufgabe 2: (4 P.) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit $A^m = E_n$ für ein $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. Zeigen Sie ferner, dass die Determinante und sogar die Spur von A ganze algebraische Zahlen sind.

Aufgabe 3:

a) (2 P.) Zeigen Sie: ist $a + b\sqrt{n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ eine ganze algebraische Zahl, so liegt das Polynom $X^2 - 2aX + (a^2 - nb^2)$ in $\mathbb{Z}[X]$.

b) (2 P.) Bestimmen Sie die ganzen algebraischen Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

c) (2 P.) Bestimmen Sie die ganzen algebraischen Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Aufgabe 4: Sei G eine endliche Gruppe, und sei R das Zentrum der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit c_g das Element aus $\mathbb{C}G$, das die Summe aller Elemente der Konjugationsklasse von g ist. Das heißt,

$$c_g = \sum \{g' \in G \mid \exists h \in G\ g' = hgh^{-1}\}\,.$$

a) (2 P.) Jedes c_g liegt in R, und die Elemente c_g stellen sogar eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums R dar.

b) (2 P.) Für $h_1, h_2 \in G$ ist $c_{h_1} c_{h_2}$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Kombination von den Elementen c_g.

c) Jedes c_g ist ganz über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5: Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass der Potenzreihen-Ring $R[[X]]$ auch noethersch ist. *Hinweis*: Der Grad einer Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ ist $\min\{n \mid a_n \neq 0\}$. Versucht man den Beweis des Basissatzes entsprechend anzupassen, so hört die Rekursion nie auf. Warum ist das aber kein Problem?

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 6

Abgabe: am Mi 31.05.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Ein kommutativer Ring R heißt dann ganz abgeschlossen in einem Erweiterungsring S, wenn jedes $\alpha \in S$, das über R ganz ist, bereits in R liegt, d.h. wenn $\bar{R} = R$ gilt. So besagt Korollar 10.6, dass $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen ist. Dagegen ist $\mathbb{Z}$ nicht in $\mathbb{C}$ ganz abgeschlossen, wie etwa der Fall $\alpha = i$ zeigt. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) (2 P.) $\mathbb{Z}[i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(i)$.

b) (2 P.) $\mathbb{Z}[2i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(2i)$.

c) (2 P.) $\mathbb{Z}[i]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

d) (2 P.) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

e) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ist ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

Hinweis: Korollar 10.4 benutzen.

Aufgabe 2: Sei R die $\mathbb{C}$-Algebra $R = \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]/I$. Führen Sie Noether-Normalisierung für R aus.

a) (2 P.) Im Fall $n = 3$, $I = (X_1^3 - X_2^2, X_1^2 + X_3^2 - 1)$.

b) (2 P.) Im Fall $n = 2$, $I = (X_1^2 + X_2^2 - 1, X_2 - X_1^2)$.

c) (2 P.) Im Fall $n = 2$, $I = (X_1^2 X_2, X_1 X_2^2)$.

d) (2 P.) Im Fall $n = 3$, $I = (X_1 X_2, X_1 X_3)$.

e) Im Fall $n = 3$, $I = (X_2^2 X_3 + X_2 X_3^2, X_1 X_2 X_3)$.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 | Übungsblatt 7

Abgabe: am Mi 07.06.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (3 P.) Seien I, J zwei Ideale in $k[X_1, \dots, X_n]$, wobei k selbstverständlich ein Körper ist. Zeigen Sie: es ist

$$V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)\,.$$

Aufgabe 2: (5 P.) Sei k ein unendlicher Körper. Wir wollen zeigen, dass die Neillsche Parabel $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(k) \mid y^2 = x^3\}$ eine affine Varietät ist, und dass das Ideal $J = (Y^2 - X^3) \lhd k[X, Y]$ mit dem Ideal $I(C)$ der Neillschen Parabel übereinstimmt.

Sei hierzu $\phi\colon k[X, Y] \to k[T]$ der k-Algebrenhomomorphismus, der durch $X \mapsto T^2$, $Y \mapsto T^3$ induziert wird.

a) Zeigen Sie: es ist $J \subseteq \mathrm{Kern}(\phi)$, und jedes $f(X, Y) \in k[X, Y]$ in einer Nebenklasse von J der Art $g(X)Y + h(X) + J$ liegt.

b) Folgern Sie, dass $J = \mathrm{Kern}(\phi)$ ist. Schließen Sie hieraus, dass J ein Primideal in $k[X, Y]$ ist.

c) Zeigen Sie, dass jedes $f \in I(C)$ im Kern von ϕ liegt. Folgern Sie, dass $I(C) = J$ gilt, und dass C eine affine Varietät ist.

Aufgabe 3: (4 P.) Zerlegen Sie $V(X^2Y - XY^2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ und $V(YX - YZ, XYZ - Z) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ als Vereinigungen von affinen Varietäten.

Aufgabe 4: (4 P.) Zeigen Sie:

a) $SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$ ist eine affine algebraische Menge in $\mathbb{A}^4(\mathbb{C})$.

b) $SL_2(\mathbb{C})$ ist sogar eine affine Varietät. *Hinweis*: Benutzen Sie folgendes Korollar des Nullstellensatzes: Ist $I \lhd \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ein Primideal, dann ist $I(V(I)) = I$, und $V(I)$ ist irreduzibel.

Aufgabe 5: Ist I ein Ideal im kommutativen Ring R, so wird das Radikal $\sqrt{I}$ durch $\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \geq 1 \text{ mit } a^n \in I\}$ definiert. In der Vorlesung wird gezeigt: I ist ein Ideal. Berechnen Sie $\sqrt{I}$ für das Ideal $I = (X^3Y - Y^2) \lhd \mathbb{C}[X, Y]$.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 — Übungsblatt 8

Abgabe: am Mi 14.06.2006 in der Vorlesung.

Durchgehend sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine algebraische Menge der Art $V(f)$ heißt eine Hyperfläche. Eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^2(k)$ heißt eine Ebene Kurve.

Aufgabe 1:

a) (1 P.) *Wiederholung aus Algebra 1*
Sei R ein faktorieller Ring und $a \in R$ ein irreduzibles Element. Zeigen Sie: $(a) \lhd R$ ist ein Primideal.

b) (2 P.) Zeigen Sie: ist f irreduzibel, so ist $V(f)$ eine Varietät.

c) (2 P.) Für $g(X) \in k[X]$ ist $Y^2 - g(X) \in k[X, Y]$ genau dann reduzibel, wenn $g(X)$ ein Quadrat in $k[X]$ ist. Ist z.B. $g(X)$ vom Grad 3, so ist $Y^2 - g(X)$ irreduzibel.

Aufgabe 2: Sei $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom. Per Definition heißt $V(f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})$ der singuläre Ort $\mathrm{Sing}(C)$ der irreduziblen Ebenen Kurve $C = V(f)$.

a) (2 P.) Berechnen Sie den singulären Ort der Neillschen Parabel $V(Y^2 - X^3)$.

b) (3 P.) $\mathrm{Sing}(C)$ ist eine echte algebraische Teilmenge von C.

c) (3 P.) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und sei $f_\lambda = Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) \in \mathbb{C}[X, Y]$. Nachdem Sie die erste Aufgabe benutzt haben, um zu zeigen, dass die Ebene Kurve $C_\lambda = V(f_\lambda)$ irreduzibel ist, zeigen Sie, dass sie außer für $\lambda = 0, 1$ auch nichtsingulär ist, d.h. $\mathrm{Sing}(C_\lambda) = \emptyset$ für $\lambda \neq 0, 1$.

d) Ist $g \in k[X, Y]$ mit $g \notin I(C)$, so gibt es ein $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ mit $g(P) \neq 0$.

Aufgabe 3: Sei $C = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass C eine algebraische Menge (3 P.) und sogar eine affine Varietät ist.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 9

Abgabe: am Mi 21.06.2006 in der Vorlesung.

Auf Blatt 8 zeigten wir, dass die Kurve $C = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ eine affine Varietät ist, und dass $I(C) = (R_8, R_9, R_{10})$ gilt, wobei

$$R_8 = Y^2 - XZ \qquad R_9 = X^3 - YZ \qquad R_{10} = Z^2 - X^2Y\,.$$

Da $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$, $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$ eine Bijektion ist, sollte C Dimension 1 haben. Der Vergleich mit Linearer Algebra legt dann nahe, dass C der Lösungsraum von zwei Polynomgleichungen sein sollte. Wie wir in den nächsten beiden Aufgaben sehen werden, stimmt diese Vorstellung nur bedingt: einerseits gibt es tatsächlich $f, g \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mit $C = V(f, g)$, anderseits ist das Ideal (f, g) dann echt in $I(C)$ enthalten: um $I(C)$ zu erzeugen, benötigt man mindestens 3 Polynome.

Aufgabe 1:

a) (3 P.) Zerlegen Sie $V(R_8, R_9)$ in seinen irreduziblen Komponenten. Ist C eine der algebraischen Mengen $V(R_8, R_9)$, $V(R_8, R_{10})$, $V(R_9, R_{10})$?

b) (2 P.) Zeigen Sie, dass XR_{10} und YR_{10} im Ideal (R_8, R_9) liegen. Schreiben Sie die entsprechenden Formeln für XR_{10} und YR_{10} hin.

c) (2 P.) Sei $f = X^2R_9 + ZR_{10}$. Zeigen Sie, dass $R_9^2 - fX$ und $R_{10}^2 - fZ$ beide im Ideal (R_8) liegen. Folgern Sie, dass $V(f, R_8) = C$ gilt.

Aufgabe 2: Jetzt zeigen wir, dass es kein $g, h \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mit $I(C) = (g, h)$ gibt.

Betrachten Sie hierfür den durch $t\text{-deg}(X^iY^jZ^k) = 3i + 4j + 5k$ definierten t-Grad. Für $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ können wir $f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_N$ schreiben, wobei f_r aus allen Termen in f vom t-Grad r besteht, und N der größte in f vorkommende t-Grad ist.

a) (2 P.) Sind $p, q \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, so ist

$$(pq)_r = \sum_{s=0}^{r} p_s q_{r-s}\,.$$

Für $r \in \{8, 9, 10\}$ gilt: ist $p = R_r$, dann $p = p_r$.

b) (2 P.) Ist $r \in \{8, 9, 10\}$, $p \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ und $q \in (R_8, R_9, R_{10})$, so ist $(pq)_r = p_0q_r$. Etwas genauer: ist $q = f^8R_8 + f^9R_9 + f^{10}R_{10}$ für Polynome $f^8, f^9, f^{10} \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, so ist $(pq)_r = p(0, 0, 0)f^r(0, 0, 0)R_r$ für $r = 8, 9, 10$.

c) (3 P.) Es gibt kein $g, h \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mit $I(C) = (g, h)$.

Aufgabe 3: (2 P.) Berechnen Sie dagegen das Radikal des Ideals $(X^2Y, XY^2) \in \mathbb{C}[X, Y]$. In diesem Fall hat $\sqrt{I}$ weniger Erzeuger als I, nicht mehr.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 10

Abgabe: am Mi 28.06.2006 in der Vorlesung.

Sie dürfen voraussetzen, dass *jede* Körpererweiterung eine Transzendenzbasis hat.

Aufgabe 1: (3 P.) Beweisen Sie die Anmerkung aus der Algebra 1 (vgl. Vorlesung am 19.06.2006): Sind $k \subseteq L \subseteq K$ Körper, so ist K/k genau dann algebraisch, wenn K/L und L/k algebraisch sind.

Aufgabe 2: (3 P.) Sei k der Körper $\mathbb{C}(X)$ der rationalen Funktionen. Zeigen Sie: Für jedes $n \geq 1$ stellt X^n eine Transzendenzbasis für $k/\mathbb{C}$ dar.

Aufgabe 3: (3 P.) Sei B eine Transzendenzbasis der Erweiterung K/k. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $k(B)/k$ rein transzendent ist, d.h. kein $\alpha \in k(B) \backslash k$ ist algebraisch über k.

Aufgabe 4: (3 P.) Zeigen Sie: ist K/k eine Körperweiterung, so gibt es einen Zwischenkörper $k \subseteq L \subseteq K$ derart, dass L/k algebraisch und K/L rein transzendent ist. Zeigen Sie außerdem: dieses L ist eindeutig definiert.

Aufgabe 5: Wie Aufgabe 4, aber diesmal sollte K/L algebraisch und L/k rein transzendent sein. Zeigen Sie: L existiert, muss aber nicht eindeutig sein (Beispiel!).

Aufgabe 6: (4 P.) Berechnen Sie die Dimension jeder Komponente der algebraischen Menge $V(Y(Y^2 - X^3), YZ, Y(X-1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 11

Abgabe: am Mi 05.07.2006 in der Vorlesung.

Durchgehend sei G eine endliche Gruppe. $\mathbb{C}G$-Moduln verstehen sich als endlich erzeugt. Denken Sie an den Satz von Maschke, und an die Beziehung $\chi_{M_1 \oplus M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}$.

Aufgabe 1: Sei G die zyklische Gruppe der Ordnung 3. Zeigen Sie, dass die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ kein Integritätsbereich ist (3 P.).

Zeigen Sie ferner: für jede endliche Gruppe $G \neq 1$ gibt es Elemente $a, b \in \mathbb{C}G \setminus \{0\}$ mit $ab = ba = 0$.

Aufgabe 2: Sei M der vierdimensionale $\mathbb{C}S_4$-Modul, der die natürliche Permutationsdarstellung verwirklicht. Berechnen Sie den Charakterwert $\chi_M(\sigma)$ für jedes $\sigma \in S_4$, anhand des Zykel-Typs von σ (3 P.). Können Sie Ihr Ergebnis auf die natürliche Darstellung des S_n verallgemeinern?

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass M eine Kopie des trivialen $\mathbb{C}S_4$-Moduls enthält. Geben Sie das Argument für diesen konkreten Fall kurz wieder.

Folgern Sie, dass es ein $\mathbb{C}S_4$-Modul N gibt, dessen Charakter χ_N die folgenden Werte annimmt (3 P.):

	e	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_N	3	1	0	-1	-1

Aufgabe 3: (4 P.) Wir haben zwei zweidimensionale Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_3 gesehen: einmal durch die Identifikation $S_3 = D_3$, und einmal als der Untermodul $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ der natürlichen Permutationsmoduls. Zeigen Sie, dass diese beiden Darstellungen äquivalent sind.

Aufgabe 4: (3 P.) Sei G eine abelsche Gruppe und M ein $\mathbb{C}G$-Modul. Zeigen Sie, dass alle Elemente aus G einen gemeinsamen Eigenvektor in M haben. (Stichwort: Gleichzeitige Diagonalisierbarkeit). Folgern Sie, dass nur die eindimensionalen $\mathbb{C}G$-Moduln einfach sind.

Erreichbare Punktzahl: 16

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 12

Abgabe: am Mi 12.07.2006 in der Vorlesung.

Mit der Ausnahme von Aufgabe 1 setzt sich dieses Übungsblatt aus **Beispiele für Prüfungs-Fragenkomplexe** unterschiedlicher Länge zusammen. Zum Semesterende liefere ich eine Musterfungsfrage zur Darstellungstheorie nach.

Aufgabe 1: Gibt es einen Mindestabstand zwischen 0 und den ganzen algebraischen Zahlen $\alpha \neq 0$? Das heißt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $|\alpha| \geq \varepsilon$ gilt für jede ganze algebraische Zahl $\alpha \neq 0$?

Hinweis: Betrachten Sie die aus der Analysis I bekannten Folge $\sqrt[n]{n}$.

Aufgabe 2: *Klassifikation endlich erzeugter Moduln über einen Hauptidealring*
Wie zeigt man direkt (d.h. ohne den Klassifikationssatz), dass $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{Z}/6$?

Was besagt der Klassifikationssatz (invariante Faktoren)? Beschreiben Sie skizzenhaft einen Weg, um einen Modul in dieser Form zu bringen. Führen Sie dieses Verfahren für den $\mathbb{Z}$-Modul M durch, wobei M durch a, b, c, d erzeugt wird und die Relationen zwischen diesen Erzeugern durch $5d = 0$, $3a = c$ und $2b = 3a + c$ gegeben sind.

Wie sehen dann die Elementarteiler von M aus?

Aufgabe 3: Sei $S \supseteq R$ eine Ringerweiterung. Wann heißt ein Element $\alpha \in S$ ganz über R? Nennen Sie Bedingungen, die sicherstellen, dass ein ganzes Element ein Minimalpolynom über S hat.

Sei S der Quotientenring $\mathbb{Z}[Y]/(2Y)$, setze $y = Y + (2Y) \in S$, und sei R der durch $z := y^2$ erzeugte Unterring. Finden Sie zwei normierte Polynome in $R[X]$ vom Grad 2, die jeweils (mindestens) eine Nullstelle in y haben. Folgern Sie, dass y zwar ganz über R ist, aber kein Minimalpolynom hat.

Sei $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{4} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass 2α eine ganze algebraische Zahl ist, α dagegen nicht.

Aufgabe 4: Was besagt der Satz über Noether-Normalisierung? Berechnen Sie ein Parametersystem für die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathbb{C}[X, Y, Z, W]/(XY - ZW, Y - W^2)$. Beschreiben Sie insbesondere, wie man die algebraische Unabhängigkeit der Parameter nachweist.

Bitte wenden

In den restlichen Aufgaben ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 5: Was ist eine affine algebraische Menge, und wann heißt eine solche Menge irreduzibel?

Wie sind die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Menge $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ charakterisiert?

Berechnen Sie die Komponenten von $V(f, g) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ für $f = (XY - X)(Y^2 - X)$ und $g = (Y^2 - Y)(Y^2 - X)$.

Aufgabe 6: Sei $I \lhd k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Was besagt der Nullstellensatz über das Ideal $I(V(I))$?

Beschreiben Sie die Korrespondenz zwischen algebraischen Mengen und Idealen, die man als Korollar des Nullstellensatzes erhält.

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine Varietät, sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom, das nicht in $I(V)$ liegt, und sei $W \subsetneq V$ eine algebraische Menge, die echt in V enthalten ist. Zeigen Sie, dass es ein $P \in V \setminus W$ gibt, derart, dass $f(P) \neq 0$ ist.

Aufgabe 7: Wie ist der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung definiert? Nennen Sie Bedingungen, die sicherstellen, dass der Transzendenzgrad wohldefiniert und endlich ist.

Wie ist die Dimension einer affinen Varietät definiert? Beschreiben Sie kurz die Verbindung zur Noether-Normalisierung.

Zeigen Sie, dass die algebraische Menge $V(Z^2 - X^3, Y^2 - XZ) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ eine eindimensionale Varietät ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Kern des Homomorphismus $\mathbb{C}[X, Y, Z] \to \mathbb{C}[T]$, der durch $X \mapsto T^4$, $Y \mapsto T^5$ und $Z \mapsto T^6$ gegeben wird.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 13

Abgabe: am Mi 19.07.2006 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 P.)
Sei V bzw. W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$ bzw. $w_1, \dots, w_m$. Ein Weg, um die Basisvektoren $v_i \otimes w_j$ des Tensorprodukts anzuordnen, ist die lexikographische Ordnung. Nach diese Ordnung kommt $v_i \otimes w_j$ vor $v_a \otimes w_b$ falls $i < a$, oder $i = a$ und $j < b$. Berechnen Sie für diese Basisordnung die Matrizen $\rho((1\,2))$ und $\rho((1\,3))$ der Darstellung $\rho\colon S_3 \to GL_6(\mathbb{C})$, die durch $\rho = \rho_2 \otimes \rho_{\text{nat}}$ erklärt wird.

Hier ist $\rho_2\colon S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ die Darstellung $(1\,2) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $(1\,3) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und ρ_{nat} ist die natürliche Permutationsdarstelllung $S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2: (4 P.)
Für die symmetrische Gruppe S_3 berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ für alle Charaktere $\chi_1, \chi_2 \in \{\chi_{\text{triv}}, \chi_{\text{sign}}, \chi_{\text{nat}}\}$.

Erläuterungen: Benutzen Sie nur die Definition des Skalarprodukts, keine weiterführenden Ergebnisse – die Zentralisator-Form der Definition dürfen Sie aber schon benutzen. Hier ist χ_{triv} bzw. χ_{nat} der Charakter der trivialen Darstellung bzw. der natürlichen Permutationsdarstellung – wie üblich. Außerdem ist χ_{sign} der Charakter der eindimensionalen Darstellung $\rho(\sigma) = \text{Vorzeichen}(\sigma)$.

Aufgabe 3: (2 P.)
Finden Sie eine Klassenfunktion, der kein Charakter ist.

Aufgabe 4: (6 P.)
Berechnen Sie das Prokukt ab in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$.

a) $G = C_2 = \langle x \rangle$ mit $x^2 = 1$; $a = 1 + x$, $b = 1 - x$.

b) $G = S_3$, $a = 3\,\mathrm{Id} - (1\,2) + (1\,3\,2)$, $b = (2\,3) - (1\,3)$.

c) $G = D_8 = \langle \delta, \sigma \rangle$ mit $\sigma^2 = \delta^4 = 1$ sowie $\sigma\delta\sigma = \delta^{-1}$; und $a = 1 + \sigma + \delta$, $b = \delta^2\sigma - \delta\sigma$.

Aufgabe 5: (4 P.)
Ein Element e eines Ringe R heißt idempotent, wenn $e^2 = e$ gilt. Finden Sie eine Idempotente e in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}C_2$ derart, dass e weder 0 noch 1 ist.

Erreichbare Punktzahl: 20

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Algebra 2

Sommersemester 2006 Übungsblatt 14

Kein Abgabetermin, wegen Semesterende. Ich bin aber gerne bereit, Ihre Lösungen mit Ihnen zu besprechen.

Aufgabe 1: Die Darstellung V der symmetrischen Gruppe S_3 hat den Grad 21. Außerdem ist $\chi_V((1\,2)) = 7$ und $\chi_V((1\,2\,3)) = 9$. Drucken Sie den Charakter χ_V als eine Summe irreduzibler Charakteren aus.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Charaktere eindimensionale Darstellungen sind multiplikativ, d.h. $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$. Finden Sie einen Charakter, der nicht multplikativ ist.

Aufgabe 3: Eine bestimmte Gruppe der Ordnung 64 hat mindestens 19 Konjugiertenklassen und genau 16 eindimensionale irreduzible Darstellungen. Benutzen Sie die Formel $|G| = \sum_{i=1}^k n_i^2$, um die genaue Anzahl der Konjugiertenklassen sowie die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen zu berechnen.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Charaktertafel von der Diedergruppe D_4.

Aufgabe 5: Vervollständigen Sie die untenstehende Charaktertafel, indem Sie die Orthogonalitätsbeziehungen benutzen. Hier ist $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$.

$\lvert C_G(g_j)\rvert$	12	4	3	3
	1	g_2	g_3	g_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4				

Auch wenn ich χ_3 weggelassen hätte, hätten Sie die Charaktertafel trotzdem eindeutig vervollständigen können. Warum?

Übrigens: es handelt sich hier um die alternierende Gruppe A_4.

Muster-Prüfungsfragen

Aufgabe 6: Wie ist der Tensorprodukt von zwei Moduln über einen kommutativen Ring definiert? Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ nicht Null ist. Können Sie dieses Tensorprodukt berechnen?

Aufgabe 7: Was ist eine gewöhnliche Darstellung einer endlichen Gruppe? Was ist der Charakter einer Darstellung? Wie wird das Skalarprodukt definiert?

Sei M eine Darstellung von G mit folgenden Eigenschaften: es ist $\langle \chi_{\mathrm{triv}}, \chi_M \rangle = 1$ und $\langle \chi_M, \chi_M \rangle = 2$. Zeigen Sie, es gibt Untermoduln N, N' von M mit $M = N \oplus N'$, wobei N die triviale Darstellung und N' eine irreduzible, nichttriviale Darstellung ist.