Vorlesung Geometrische Integrationstheorie

Prof. Dr. M. Zähle; Übung: Dr. U. Freiberg (Sommersemester 07)

Die Geometrische Integrationstheorie hat viele innermathematische Anwendungen in der Variationsrechnung im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen, der Theorie der Minimalflächen, der Potentialtheorie, der Differentialgeometrie, der Stochastischen Geometrie und der Fraktalen Geometrie. Schwerpunkt der Vorlesung sind ein Integraltransformationssatz für Hausdorff-Maße und eine allgemeine Variante des Satzes von Stokes aus der Vektoranalysis, der zahlreiche Anwendungen in der Physik gestattet.
Die Vorlesung ist für Mathematik- und Physikstudenten im Hauptstudium geeignet. Voraussetzung sind Grundkenntnisse in der Maßtheorie.

Inhalt

1 Hausdorff-Maße

n-dimensionalen Hausdorff-Maßen im $\mathbb{R}^d$ als spezielle Überdeckungsmaße, Übereinstimmung mit dem Oberflächenmaß bei glatten Flächenstücken (Beweis in Kapitel 2), geometrische Eigenschaften, Ausblick auf fraktale Hausdorff-Maße

2 Transformation von Hausdorff-Maßen auf rektifizierbaren Mengen in euklidischen Räumen

Verallgemeinerung des Transformationssatzes für Integrale bezüglich des Lebesgue-Maßes auf niederdimensionale Mengen mit Singularitäten

2.1 Klassische Formulierung des Hausdorffschen Flächensatzes und Anwendungen

Transformation des Lebesgue-Maßes unter linearen Abbildungen, Hausdorffscher Flächensatz für lineare Abbildungen als Folgerung, Flächensatz für differenzierbare Injektionen, Lebesguescher Transformationssatz als Spezialfall, Hausdorff- Maße auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$ in Parameterdarstellung, Flächensatz für differenzierbare Abbildungen

2.2 Beweise

über lokale Linealisierung bei injektivem Differential und Vernachlässigung von singulären Werten (Satz von Sard) im Allgemeinfall

2.3 Ausdehnung auf eine Klasse rektifizierbarer Mengen

Ausgangsraum $\mathbb{R}^n$ wird ersetzt durch gewisse $\mathcal{H}^n$- rektifizierbare Mengen im $\mathbb{R}^d$, Flächensatz liefert grundlegende Transformationsregel bei der Integration von Differentialformen (Kapitel 4)

3 Hilfsmittel aus der multilinearen Algebra

Lineare algebraische Strukturen, die zur Integration von Differentialformen benötigt werden

3.1 Die alternierende Algebra über einem Vektorraum

alternierende n-Linearformen, äußeres Produkt und Eigenschaften, Transformation unter linearen Abbildungen des Vektorraumes (Zurückholen)

3.2 Die äußere Algebra über einem euklidischen Vektorraum

n-Vektoren werden wie n-Linearformen eingeführt, wobei der endlichdimensionale Vektorraum durch seinen dualen ersetzt wird, Skalarprodukt im Raum der n-Vektoren über dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ (analog für n-Linearformen über $\mathbb{R}^d$), geometrische Interpretation von einfachen n-Vektoren als Äquivalenzklassen von gleichorientierten Parallelepipeden mit gleichem aufgespannten Unterraum und gleichem Volumen, Transformation von Multivektoren unter linearen Abbildungen

3.3 Duale Paarung von n-Vektoren und alternierenden n-Formen

Wirkung der Form auf die Repräsentanten des Multivektors, geometrische Deutung

4 Integration von Differentialformen

Verallgemeinerung der Integration von Funktionen über $\mathcal{H}^n$-Mengen, Abbildungen dürfen zusätzlich von den Tangentialräumen der Punkte abhängen, Elemente der Vektoranalysis auf Kettenkomplexen

4.1 Multivektorfelder und Differentialformen im $\mathbb{R}^d$

Abbildungen von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ in den Raum der n-Vektoren bzw. der alternierenden n-Linearformen (mit verschiedenen Differenzierbarkeiten), Zurückholen einer Differentialform

4.2 Integration von Diffentialformen über $\mathcal{H}^n$-Mengen

Orientierung einer $\mathcal{H}^n$-Menge, Integralbegriff, Parameterdarstellung über ein Kartengebiet einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit, allgemeine Transformationsformel beim Übergang von einer $\mathcal{H}^n$-Menge zu einer anderen (vgl. 2.3)

4.3 Der Satz von Stokes für den Einheitswürfel

Herleitung über den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (Leibnitz-Regel)

4.4 Äußere Differentiation von Differentialformen

Motivation anhand der speziellen Variante in 4.3; charakteristischen Eigenschaften der äußeren Differentiation; grad, div und rot als relevante Beispiele, äußeres Differential und Zurückholen

4.5 Der Satz von Stokes für Ketten

Zurückführen auf den Spezialfall des Würfels mit Hilfe der Transformationsformel aus 4.2

4.6 Die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis

als Spezialfälle des Satzes von Stokes, Anwendungsbeispiel in der Theorie elektromagnetischer Felder

4.7 Anwendungen in der harmonischen Analysis

Greensche Formeln und Anwendung auf harmonische Funktionen