

Übung zur Vorlesung „Elementare WMS“

9. Serie

1. Eine Ladung Saatgut wird in Päckchen zu je 1 000 Samenkörnern verkauft. Von früheren Prüfungen her sei bekannt, daß mit 0,5%-iger Wahrscheinlichkeit ein Korn nicht zur Sorte des betreffenden Saatgutes gehört. Wir können annehmen, daß die zufällige Anzahl der fremden Körner binomialverteilt ist. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem Päckchen mehr als 5 nicht zur Sorte gehörige Körner befinden 3 P

- (a) exakt,
(b) näherungsweise.

Nach Möglichkeit berechne man die auftretenden Wahrscheinlichkeiten rekursiv.

2. Es würfelt jemand 10 000 mal. Man bestimme näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß höchstens 1 500 mal eine Sechs fällt. 3 P
3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ das unendliche Bernoulli-Schema mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p , und es sei $0 < \alpha < 1$. Es bezeichne S_n die Anzahl der Erfolge in n Versuchen. Mit Hilfe der Tschebyschev'schen Ungleichung ermittle man die Anzahl n der Versuche, die hinreichend dafür ist, daß $\frac{1}{n}S_n$ von der wahren Erfolgswahrscheinlichkeit p mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens α um mehr als eine gegebene positive Zahl ε abweicht. Man diskutiere die Fälle 4 P

$$\begin{array}{lll} p = 0,5; & p = 0,1; & p \text{ unbekannt;} \\ \alpha = 0,1; & \alpha = 0,05; & \alpha = 0,01; \\ \varepsilon = 0,02; & \varepsilon = 0,01. & \end{array}$$

- 4.* Man zeige, daß für die Binomialverteilung $B_{n,p}$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$B_{n,p}(\{k\}) \text{ ist in } k \begin{cases} \text{monoton wachsend für } k \leq m, \\ \text{monoton fallend für } k \geq m. \end{cases}$$

Dabei ist m die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, für die

$$(n+1)p - 1 < m \leq (n+1)p$$

gilt. Wenn $(n+1)p$ eine natürliche Zahl ist, so gilt $m = (n+1)p$, und es gilt 4 P

$$B_{n,p}(\{m-1\}) = B_{n,p}(\{m\}).$$

Andernfalls ist m die einzige natürliche Zahl, für die $B_{n,p}(\{k\})$ für $k = m$ das Maximum annimmt. (Die Zahl $B_{n,p}(\{m\})$) heißt *maximale Wahrscheinlichkeit*, und m heißt die *wahrscheinlichste Anzahl der Erfolge oder der Modalwert*.

Abgabe: Montag, 07.01.2008 (1. Gruppe) bzw. Dienstag, 08.01.2008 (2. Gruppe), jeweils zu Beginn der Übungszeit

* Zusatzpunkte