Übungen zur Vorlesung
”Elementare WMS”

1. Serie

1. Man beweise die folgenden Regeln für mengentheoretische Operationen. Dabei bezeichne A^c das Koplement der Menge A sowie $A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ die symmetrische Differenz von A und B.

   (a) (de Morgansche Regeln)
   $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
   $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

   (b) (Distributivgesetze)
   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
   $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

   (c) $$A\triangle\ B = A^c\triangle\ B^c,$$

   (d) $$A\triangle(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(A\triangle\ B_j),$$

   (e) * $$A\triangle(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) \supseteq \bigcap_{j=1}^{\infty}(A\triangle\ B_j),$$

   (f) * $$(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)\triangle(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j\triangle\ B_j),$$

   (g) * $$(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)\triangle(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j\triangle\ B_j).$$

2. Es sei $\mathcal{F}$ eine Ereignisalgebra. Man zeige, daß dann auch die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

   (a) $$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F},$$

   (b) $$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F} \ \text{ und } \ A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F},$$

   (c) $$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A\backslash B \in \mathcal{F},$$

   (d) $$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A\triangle\ B \in \mathcal{F}.$$

   Ist $\mathcal{F}$ darüber hinaus eine σ-Algebra, so zeige man

   (e) $$(A_n) \subseteq \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man zeige, daß dann die *starke Additivität* gilt:

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

4.* In Verallgemeinerung von Aufgabe 3 beweise man die Formel von Poincaré: Für beliebige $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ 0 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right).$$

Abgabe: Zur Übungszeit in der Woche vom 31. Oktober – 4. November 2005

* Fakultative Aufgabe, zur Bearbeitung empfohlen