Übung zur Vorlesung
„Elementare WMS“

14. Serie

1. Es seien X und Y zufällige Größen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E(X^2) < +\infty$ und $E(Y^2) < +\infty$, Y ist der Beobachtung zugänglich, aber X nicht. Eine lineare Schätzung von X aufgrund von Y ist eine zufällige Größe $\hat{X} = aY + b$ mit reellen a und b. Eine lineare Schätzung $\hat{X}$ von X aufgrund von Y heißt erwartungstreu, falls $E\hat{X} = EX$ gilt. Man bestimme Konstanten a_0 und b_0, so daß $\hat{X} = a_0 Y + b_0$ eine erwartungstreue lineare Schätzung von X aufgrund von Y mit minimaler mittlerer quadratischer Abweichung **4 P**

$$E(X - [aY + b])^2$$

im Vergleich mit anderen erwartungstreuen linearen Schätzungen $aY + b$ ist.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (A_n) eine Folge von Ereignissen. **4 P**

(a) Man zeige:

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n), \quad \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big).$$

(b) Es existiere $\lim_{n\to\infty} A_n$ P-f.s., d. h., es gibt eine Menge $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $P(\Omega_0 = 1)$ und

$$\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \cap \Omega_0 = \Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) \cap \Omega_0.$$

Man zeige, daß dann folgt:

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Dabei ist $\lim_{n\to\infty} A_n$ als die P-f.s. eindeutig bestimmte Menge aus $\mathcal{F}$ mit

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \lim_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

definiert.

3. Es sei (X_n) eine Folge $N(0, \sigma_n^2)$-verteilter zufälliger Größen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man zeige **4 P**

(a) $X_n \Longrightarrow_{n\to\infty} 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ in Wahrscheinlichkeit.

4.* Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ das unendliche Bernoulli-Schema mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Man konstruiere auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine *unabhängige* Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zufälliger Größen derart, daß U_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist. **5 P**

Hinweis: Man verwende eine Bijektion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und verfolge den in Aufgabe 13.4 vorgezeichneten Weg.

Abgabe: Montag, 11.02.2008 (1. Gruppe) bzw. Dienstag, 12.02.2008 (2. Gruppe), jeweils zu Beginn der Übungszeit

* Zusatzpunkte