

# Vorlesung

## Optimales Stoppen

(SS 2007)

**Umfang:** 2 SWS Vorlesung

**Zielgruppe:** 1) Mathematik-Diplom, 2) Wirtschaftsmathematik-Diplom

**Vorkenntnisse:** 1) Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Grundlagen (Maß und Integral), 2) Stochastik für Wirtschaftsmathematiker 1–2, dringend empfohlen: Maß und Integral

Die Theorie des optimalen Stoppens zufälliger Prozesse hat ihren Ursprung in Arbeiten von A. Wald (vgl. [6]) zur statistischen Sequentialanalyse. Die fundamentale Idee von A. Wald bestand darin, z. B. bei der Unterscheidung zweier statistischer Hypothesen den Stichprobenumfang nicht fest vorzugeben, sondern zufällig (d.h., in Abhängigkeit von den gemachten Beobachtungen) zu wählen. Auf diese Weise gelang es A. Wald, den erforderlichen mittleren Beobachtungsumfang drastisch zu senken.

Die Grundlagen der allgemeinen Theorie des optimalen Stoppens gehen auf J. L. Snell [5] (1952) (Schüler von J. L. Doob) und G. W. Haggstrom [2] (1966) (Schüler von D. L. Burkholder) zurück. In der Folgezeit ist eine enorme Entwicklung zu beobachten, die ihren Ausdruck in den Monographien von A. N. Shiryaev [4] (1969) und Y.S Chow, H. Robbins und D. Siegmund [1] (1971) findet.

In den letzten Jahren wurde die Theorie des optimalen Stoppens durch die Bedürfnisse der Finanzmathematik (es geht dabei um die Behandlung sogenannter amerikanischer Optionen) wiederentdeckt. An dieser Stelle sei auf die 2006 erschienene Monographie von G. Peskir und A. N. Shiryaev [4] verwiesen.

Die Vorlesung befasst sich mit einer Einführung in die Theorie des optimalen Stoppens zufälliger Folgen  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Dabei wird  $X_n$  als Totalgewinn (z. B. in einem Spiel) bis zum Zeitpunkt  $n$  interpretiert. Die grundlegende Aufgabenstellung besteht darin, einen zufälligen Abbruchzeitpunkt zu bestimmen, der den mittleren Gewinn maximiert. Von Interesse ist außerdem, den „Wert des Spieles“ (den maximal möglichen Gewinn) aufzufinden.

Nach der Bereitstellung einiger mathematischer Grundlagen ohne Beweise (gleichmäßige Integrierbarkeit, bedingte Erwartungen, Martingale) werden die Grundzüge der Theorie (sowohl für unbeschränkte als auch für beschränkte Beobachtungszeit) dargelegt. Dabei soll auch auf den unabhängigen Fall und den Markovschen Fall eingegangen werden. Soweit die Zeit reicht, sollen zahlreiche Beispiele behandelt werden, darunter:

- das Problem der besten Wahl (aus  $N$  Objekten (z. B. Hotels) soll durch sukzessive Inspektion das beste ausgewählt werden, ein Rückgriff ist nicht möglich);
- sequentielle Hypothesenunterscheidung;
- amerikanische Optionen am Beispiel.

## Literatur

- [1] Y.S. Chow, H. Robbins, D. Siegmund: Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Houghton Mifflin, Boston, Massachusetts, 1971
- [2] G.W. Haggstrom: Optimal Stopping and Experimental Design. Ann. Math. Statist. 37, 7–29 (1966)
- [3] G. Peskir, A.N. Shiryaev: Optimal Stopping and Free-Boundary Problems, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006
- [4] A.N. Shiryaev: Optimal Stopping Rules. Springer-Verlag, 1978 (russisches Original: 1. Auflage 1969, 2. Auflage 1976)
- [5] J.L. Snell: Applications of Martingale System Theorems. Trans. AMS 73, 293–312 (1952)
- [6] A. Wald: Sequential Analysis. Wiley, New York 1947