

KAPITEL I: EINFÜHRUNG

1. Experimente, zufällige Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeitstheorie gründet sich auf die Existenz des *Zufalls*.

Die Frage nach dem *Charakter des Zufalls* beschäftigt seit langer Zeit Philosophen und Naturwissenschaftler.

Der Zufall äußert sich durch das Auftreten *zufälliger Ereignisse* im Ergebnis *eines Experimentes*.

Definition 1. Ein *Experiment* oder ein *Versuch* bedeutet die Realisierung einer wohlbestimmten Menge von Bedingungen (eines *Bedingungskomplexes*), die zumindest im Prinzip beliebig oft reproduzierbar sind. Diese Bedingungen heißen *für das Experiment wesentliche Bedingungen*.

Experimente findet man in: Naturwissenschaften, Technik, Gesellschaft, Natur, tägliches Leben.

Verständnis des Begriffes eines Experimentes im weitesten Sinne: Experimentator ist nicht nur der Mensch, sondern zum Beispiel auch die Natur.

Beispiel: Wetter

Definition 2. Ein *Ereignis* ist jede Erscheinung im Ergebnis eines Experiments.

Es sei \mathcal{E} die Gesamtheit aller mit einem Experiment verbundenen Ereignisse.

Definition 3. Ein *zufälliges Ereignis* ist ein Ereignis, welches im gegebenen Versuch eintreten kann, aber nicht eintreten muß. Es tritt nicht mit Notwendigkeit ein.

Mit anderen Worten: Ein wohlbestimmtes zufälliges Ereignis A tritt bei wiederholten Versuchen (unter dem gleichen Komplex wesentlicher Bedingungen) in manchen Versuchen ein und in manchen Versuchen *nicht* ein.

Das *sichere Ereignis* tritt mit Notwendigkeit ein.

Das *unmögliche Ereignis* tritt mit Notwendigkeit *nicht* ein.

Die Gesamtheit \mathcal{E} aller im Ergebnis eines Experimentes auftretenden Ereignisse besitzt eine Struktur:

- Bezeichnet O das unmögliche Ereignis, so gilt $O \in \mathcal{E}$.
- Bezeichnet E das sichere Ereignis, so gilt $E \in \mathcal{E}$.
- Ist A ein Ereignis ($A \in \mathcal{E}$), so ist auch (*nicht* A) ein Ereignis ($(\text{nicht } A) \in \mathcal{E}$).
- Gilt $A, B \in \mathcal{E}$, so folgt $(A \text{ und } B) \in \mathcal{E}$.
- Gilt $A, B \in \mathcal{E}$, so folgt $(A \text{ oder } B) \in \mathcal{E}$.

Man sagt, \mathcal{E} ist eine *Ereignisalgebra*.

Zufall und Notwendigkeit sind relative Begriffe, sie befinden sich in einem Spannungsverhältnis. Sie sind stets in Bezug auf den Bedingungskomplex zu sehen. Ändert sich der Bedingungskomplex, so kann ein zufälliges Ereignis zu einem notwendigen Ereignis werden und umgekehrt.

Zufall ist also *nicht absolut*.

Ist Zufall *objektiv*?

- Das heißt, existiert Zufall unabhängig von unserem Bewußtsein?
- Existieren zufällige Ereignisse überhaupt oder ist Zufall nur auf Mangel an Wissen über die wahren Zusammenhänge zurückzuführen?

(Im letzteren Fall spricht man vom subjektiven Charakter des Zufalls.)

Unterschiedliche Beantwortung dieser Fragen von Philosophen sowie Naturwissenschaftlern.

Einerseits: In den modernen Naturwissenschaften Anerkennung des objektiven Charakters des Zufalls weit verbreitet.

Andererseits: Die philosophische Richtung des mechanischen Determinismus mit seiner Blütezeit im 18. und 19. Jahrhundert ist immer noch lebendig.

2. Einige Beispiele

2.1. Münzwurf

Das Experiment wird durch den folgenden Bedingungskomplex beschrieben:

Eine “unverfälschte“ Münze werde geworfen.

(Der Wurf soll “fair“ sein, ein Trick sei nicht erlaubt.)

- Mögliche Versuchsausgänge: Wappen (W), Zahl (Z).
- Sicheres Ereignis: Eintreten von Wappen *oder* Zahl. Es wird durch $\Omega = \{W, Z\}$ dargestellt.
- Unmögliche Ereignis: Weder W noch Z tritt ein. Es entspricht der leeren Menge \emptyset .
- Zufällige Ereignisse sind:

{es tritt Wappen auf}, {es tritt Zahl auf}.

Entsprechende Mengen: $A = \{W\}$, $B = \{Z\}$.

Alle möglichen Ereignisse durch Mengen beschrieben:
 \emptyset , A , B , Ω .

Problem: Kann jedem dieser Ereignisse C eine Wahrscheinlichkeit $P(C)$ zugeordnet werden?

Vernünftig: $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.

$P(A) = ?$ und $P(B) = ?$

Durchführung von Versuchen bringt erste Vorstellungen.

2.2. Würfeln

Bedingungskomplex des Experimentes:

Mit einem “unverfälschten“ Würfel werde auf “faire“ Weise gewürfelt.

- Mögliche Versuchsausgänge:
Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Sicheres Ereignis: Gegeben durch die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Unmögliches Ereignis: Keine der Zahlen von 1 bis 6 wird gewürfelt, Bezeichnung: \emptyset .
- Zufälliges Ereignis: Teilmenge A von Ω mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$.
- Beispiele von zufälligen Ereignissen:

$$A = \{\text{es wird eine gerade Zahl gewürfelt}\} = \{2, 4, 6\},$$

$$B = \{\text{es wird eine Sechs gewürfelt}\} = \{6\}.$$

Frage: Wahrscheinlichkeiten $P(A) = ?$ und $P(B) = ?$ (sofern sie existieren).

2.3. n-maliger Münzwurf

Bedingungskomplex des Experiments:

Eine "unverfälschte" Münze werde auf "faire" Weise n -mal geworfen.

- Mögliche Versuchsausgänge: n -Tupel der Form (a_1, \dots, a_n) mit $a_i = W$ oder $a_i = Z$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- Sicheres Ereignis: Eintreten eines der möglichen Versuchsausgänge, beschrieben durch

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i = W \text{ oder } a_i = Z\}.$$

- Unmögliches Ereignis: Keines der n -Tupel $\omega = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ tritt ein, Bezeichnung durch \emptyset .
- Zufälliges Ereignis: Jede Teilmenge A von Ω mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$.
- Beispiel eines zufälligen Ereignisses:
 $A = \{\omega = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega : a_n = W\}.$

2.4. Lebensdauer einer Glühbirne

Bedingungskomplex für das Experiment:

Aus einer Lieferung wird eine Glühbirne eines wohlbestimmten Typs auf einem Prüfstand bei zulässiger Spannung, etc., in Betrieb gesetzt, bis der Ausfall eintritt. Der Ausfallzeitpunkt wird gemessen.

- Mögliche Versuchsausgänge: Nichtnegative reelle Zahlen $t \in [0, \infty)$.
- Sicheres Ereignis: Die Lebensdauer ist eine nichtnegative reelle Zahl. Bezeichnung durch Ω , es gilt $\Omega = [0, \infty)$.
- Unmögliches Ereignis: Die Lebensdauer ist keine positive reelle Zahl. Bezeichnung durch \emptyset .
- Beispiele von zufälligen Ereignissen: Es sei t eine nichtnegative reelle Zahl.

1) $A_t = \{\text{die Glühbirne fällt zum Zeitpunkt } t \text{ aus}\} = \{t\}$.

(Das bedeutet: t ist die Lebenszeit.)

Das Ereignis $A_0 = \{0\}$ sagt aus: Die Glühbirne ist bereits zur Inbetriebnahme kaputt.

Unter vernünftigen Bedingungen gilt für die Wahrscheinlichkeit von A_t : $P(A_t) = 0$ für alle $t > 0$.

Die zufälligen Ereignisse A_t ($t > 0$) sind deshalb nicht übermäßig interessant.

2) A_0 von größerem Interesse: Seine Wahrscheinlichkeit $P(A_0)$ im allgemeinen streng positiv, $P(A_0)$ Ausschußrate der Lieferung.

3) $B_t = \{\text{die Glühbirne brennt mindestens bis } t \text{ einschließlich}\} = (t, \infty)$.

4) Für nichtnegative reelle Zahlen s, t mit $s < t$ betrachten wir das zufällige Ereignis

$B_{s,t} = \{\text{die Glühbirne fällt im Intervall } [s, t) \text{ aus}\} = [s, t)$.

Von Bedeutung: Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ereignissen der beiden letztgenannten Typen.

2.5. Heißenbergsche Unschärferelation

(Quantenphysik)

Folgendes Experiment:

- Eine Elektronenquelle emittiere in einigem Abstand vor einer Wand Elektronen.
- Die Wand besitze einen Spalt. Im Regelfall treffen die Elektronen auf die Wand, einige Elektronen treten durch den Spalt und setzen ihre Bewegungsbahn fort, bis sie auf einen Schirm treffen, der in einigem Abstand hinter der Wand aufgestellt ist.
- Wo trifft ein emittiertes Elektron, daß durch den Spalt der Wand getreten ist, auf den Schirm?
- Zufälliges Ereignis: Das Elektron trifft einen vorher markierten Bereich des Schirmes.
- Durch folgende Beobachtung untermauert: Bei enger werdendem Spalt wird die Streuung der Elektronen beim Auftreffen auf dem Schirm nicht etwa kleiner, sondern größer.
- Der Ort des Auftreffens des Elektrons auf dem Schirm ist zufällig.
- Die Bahnkurve des Elektrons ist zufällig.

- Die Ursache für die gemachte Beobachtung bei enger werdendem Spalt: Die Geschwindigkeit des Elektrons bei Durchtritt durch den Spalt (Betrag und Richtung) weist eine vermehrte Zufälligkeit auf.

Heißenbergsche Unschärferelation:

Ort und Geschwindigkeit (bzw. Impuls) können nicht *gleichzeitig* fixiert werden.

Die Summe der Streuungen von Ort und Geschwindigkeit kann eine gewisse streng positive untere Grenze nicht unterschreiten.

3. Relative Häufigkeiten

Allen unseren Beispielen war gemeinsam:

- Eine Menge von möglichen Versuchsausgängen oder *elementaren Ereignissen* Ω ;
- eine Gesamtheit von Ereignissen $A \subseteq \Omega$, insbesondere \emptyset (das unmögliche Ereignis) und Ω (das sichere Ereignis).
- Hypothese: Jedes Ereignis A besitzt als Maß für die Möglichkeit des Eintretens eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Frage: Wie können wir eine Vorstellung über die Größe von $P(A)$ gewinnen?

n-malige Wiederholung des Einzelexperiments: Beobachten jedesmal, ob A eingetreten ist oder nicht.

Wir definieren: $k_n(A)$ = Anzahl der Versuche, in denen A eingetreten ist.

Definition 1. (i) $k_n(A)$ heißt die *absolute Häufigkeit* des Eintretens von A in n Versuchen.

(ii) Die Zahl

$$h_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

heißt die *relative Häufigkeit* des Eintretens von A in n Versuchen.

- Ist $h_n(A)$ größer als $h_n(B)$, so gehen wir intuitiv davon aus, daß A wahrscheinlicher als B ist.
- Die relative Häufigkeit ist also intuitiv ein Maß für die Wahrscheinlichkeit von A .

Offensichtlich besitzen die relativen Häufigkeiten folgende Eigenschaften:

- Für alle Ereignisse A gilt $0 \leq h_n(A) \leq 1$.
- $h_n(\emptyset) = 0$, $h_n(\Omega) = 1$.
- Ist (A_k) eine Folge von Ereignissen mit $A_k \cap A_l = \emptyset$ für alle $k \neq l$ und ist $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ wieder ein Ereignis, so folgt

$$h_n(A) = \sum_{k=1}^{\infty} h_n(A_k).$$

Wir werden auf diese Eigenschaften zurückkommen.

4. Historische Anmerkungen

- Altertum: Astragalus (3500 vor der Zeitrechnung)
- Englische Puritaner (12./13. Jhdt.): Untersuchung des Wahrscheinlichkeitscharakters von Gottesurteilen
- Untersuchung von Glücksspielen (15./16. Jhdt.): Italiener CARDANO, PACIOLI, TARTAGLIA
- Briefwechsel FERMAT – PASCAL (1654): Zwei Spieler müssen ein Spiel vorzeitig abbrechen. Wie ist der Spieleinsatz aufzuteilen?
- Buch von HUYGENS: “Über Berechnungen im Glücksspiel“ (1654).
- Als einer der Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt: JACOB BERNOULLI (1654–1705).

Sein Werk: “Ars Conjectandi“ (1713 postum)

- DE MOIVRE
- Neuzeit: A.N. KOLMOGOROV: “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Springer-Verlag, 1933

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird damit zur mathematischen Disziplin.— Die mathematischen Fundamente wurden mit der Maß- und Integrationstheorie durch E. BOREL und H. LEBESGUE zu Beginn des 20. Jhdts. gelegt.

5. Der Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik

Landläufig: Zufall etwas Chaotisches, “nicht gesetzmäßig“

JEDOCH:

- Zufall und Gesetz schließen sich nicht aus.
- Zufall verletzt das Prinzip der Kausalität nicht: Jede Erscheinung hat ihre Ursache.
- Auch zufällige Erscheinungen haben ihre Ursache.
- Auch der Zufall besitzt Gesetzmäßigkeiten.
- Wir sprechen von *Zufallsgesetzen*.

Aufgabenstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Mathematische Analyse von Zufallsgesetzen, Modellierung realer zufälliger Erscheinungen, ihre theoretische Behandlung, Ableitung theoretischer Schlußfolgerungen.

Aufgabenstellung der Mathematischen Statistik:

Konkrete Bestimmung der in der Praxis herrschenden Zufallsgesetze auf der Grundlage von Daten (Beobachtungen) und ihre Auswertung