MASS UND INTEGRAL

Sommersemester 2008

Ziel der Vorlesung:

- Bereitstellung eines hinreichend allgemeinen Integralbegriffs
- dafür Grundlage: Inhaltsmessung (Volumen, Fläche, Länge)

Messung des Inhaltes von möglichst allgemeinen Mengen: altes Problem

Zufriedenstellende Lösung: erst in der neueren Zeit

Historischer Abriß:

A.L. Cauchy (1789 – 1857):

führte 1823 das Integral für stetige reelle Integranden ein

B. Riemann (1826 – 1866):

verallgemeinerte diesen Integralbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen, den sogenannten Riemann-integrierbaren Funktionen

Habilitationsschrift (1854)

postum 1867 publiziert

G. Peano (1858–1932),
C. Jordan (1838–1922):

entwickelten eine Inhaltslehre. Ein fundamentales Problem, welches lange Zeit ungelöst blieb:
Welchen Teilmengen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ kann ein Volumen (bzw. eine Fläche, eine Länge) zugeordnet werden?

Grundlage:
- Begründung der Lehre von den reellen Zahlen durch R. Dedekind (1845–1918)
- Die durch G. Cantor (1845–1918) geschaffene Mengenlehre

É. Borel (1871–1956),
H. Lebesgue (1875–1941):

gelingt am Ende des 19. Jahrhunderts und zu Beginn des 20. Jahrhunderts der Durchbruch

• É. Borel konnte 1898 das Problem der Inhaltsmessung zufriedenstellend lösen. Er zeigte, daß jeder Menge aus einer bestimmten Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die wir heute nach ihm *Borelmengen* nennen, ein Inhalt (Volumen, Fläche, Länge) zugeordnet werden kann.

• Auf dieser Grundlage konnte H. Lebesgue im Jahre 1902 in seiner Dissertation ein Integral konstruieren, das heute nach ihm benannte *Lebesgue-Integral*. H. Lebesgue fand einen neuen Zugang, der sich als besonders fruchtbringend erwies:

Während beim Riemann-Integral die Abszisse in immer feiner werdende Teilintervalle zerlegt wurde, wählt er geeignete Zerlegungspunkte der Ordinate. Dieser Zugang erweist sich nicht nur im Falle von Funktionen, die auf der reellen Achse definiert sind oder reelle Werte annehmen, als außerordentlich flexibel.

- Grundlage für die Entwicklung einer allgemeinen (abstrakten)
Maß- und Integrationstheorie,
die bis etwa 1930 erfolgte:
J. Radon (1887–1956),
M. Fréchet (1878–1973)

Rolle der Maß- und Integrationstheorie:

- Gewaltiger Einfluß auf die Grundlegung und weitere Entwicklung anderer mathematischer Disziplinen

- Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik als *mathematische Disziplin*

A.N. Kolmogorov (1903–1987):
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer-Verlag, Berlin 1933,

baut grundlegend auf den Ideen von
É. Borel und H. Lebesgue auf und entwickelt sie systematisch weiter

- Unverzichtbares Hilfsmittel für weitere, zahlreiche Gebiete der modernen Mathematik, wie z.B.:

Mathematische Analysis, Ergodentheorie, Spektraltheorie, Geometrie, stetige Optimierung, optimale Steuerung

Anliegen der Vorlesung:

Vermittlung von einigen Grundzügen der Maß- und Integrationstheorie

- als Hilfsmittel für andere mathematische Disziplinen
- und für eine selbständige Weiterbeschäftigung und Vertiefung

Vollständige Abhandlung der Maß- und Integrationstheorie im Rahmen dieser Vorlesung ist weder möglich noch wird sie angestrebt.