B. Külshammer

Ausgabe: 10.12.2007
Abgabe: 18.-21.12.2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

Übungsblatt 8

Aufgabe 32 (2+4)

In dieser Aufgabe sei $K = \{0, 1, 2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Ferner seien die folgenden Untervektorräume des K^5 gegeben:

$$U_1 = \mathrm{Span}((1,2,2,0,2),\ (1,0,1,2,0),\ (0,2,1,2,2)),$$
$$U_2 = \mathrm{Span}((1,1,0,1,1),\ (1,2,1,2,1),\ (2,2,2,1,1)).$$

(i) Untersuchen Sie, ob der Vektor $(2,2,1,0,0)$ in U_1 bzw. U_2 liegt.

(ii) Bestimmen Sie Basen von $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 33 (3)

Es sei M die Menge aller *magischen Quadrate*, d.h. aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, in denen alle Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen den gleichen Wert haben. Zeigen Sie, dass M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist, und bestimmen Sie seine Dimension.

Aufgabe 34 (2+2+2)

(i) Zeigen Sie, dass die Menge S aller symmetrischen Matrizen ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, und bestimmen Sie seine Dimension.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge T aller schiefsymmetrischen Matrizen ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, und bestimmen Sie seine Dimension.

(iii) Beweisen Sie: $\mathbb{R}^{n\times n} = S \oplus T$.

Aufgabe 35 (2+2)

(i) Schreiben Sie die folgende Matrix als Produkt elementarer Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ n+1 & \dots & 2n \\ \vdots & & \vdots \\ n^2-n+1 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36 (4+2)

(i) Finden Sie heraus, welche der folgenden Matrizen A_1, A_2, A_3 zueinander zeilenäquivalent sind, und konstruieren Sie ggf. eine invertierbare Matrix F mit $FA_i = A_j$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 7 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -15 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Geben Sie zwei Matrizen an, die äquivalent, aber nicht zeilenäquivalent sind.