B. Külshammer

Ausgabe: 22.10.07
Abgabe: 30.10.-02.11.07

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LA Gymnasium)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2+2)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_n := 2^{2^n} + 1$. (**Fermat-Zahl**)

(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $F_0\, F_1 \ldots F_n = F_{n+1} - 2$.

(ii) Folgern Sie, dass je zwei verschiedene Fermat-Zahlen teilerfremd sind (d.h. außer ± 1 keinen gemeinsamen Teiler haben).

[Pierre de Fermat (1601-1665) war französischer Rechtsanwalt, Politiker und Mathematiker. Seine Biographie (und die vieler anderer Mathematiker) findet man im Internet unter der Adresse `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history`.]

Aufgabe 2 (2+2)

Beweisen Sie mit Hilfe eines Widerspruchbeweises:

(i) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

[Die folgende Idee geht auf Euklid (325-265) zurück: Man nimmt an, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gibt, und betrachtet $N := p_1 \ldots p_r + 1$.]

(ii) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4n - 1$.

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2+2)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Mengen A und B:

(i) $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$

(ii) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

(iii) $2^{A \cup B} \supseteq 2^A \cup 2^B$

(iv) $2^{A \times B} \subseteq 2^A \times 2^B$

(v) $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$

(vi) $2^{A \times B} \supseteq 2^A \times 2^B$.

Aufgabe 4 (2)

Zeigen Sie, dass $a := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ für $n > 1$ keine ganze Zahl ist.

[Hier müssen Sie wahrscheinlich etwas tüfteln.]