Übungen zur Vorlesung
Mathematik (Lineare Algebra)
Blatt 6

Aufgabe 1. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 2\,x_2 + 1\,x_3 &= a \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 - 1\,x_3 &= b \\ 7\,x_1 - 2\,x_2 + 1\,x_3 &= c \end{aligned}$$

(i) keine (ii) genau eine (iii) mehr als eine
Lösung hat.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K. Für jede lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ sei $f^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie:

(i) $(f + g)^* = f^* + g^*$ für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$

(ii) $(\alpha f)^* = \alpha f^*$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\alpha \in K$.

(iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

(iv) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$

(v) Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ invertierbar, so ist auch f^* invertierbar, und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ invertierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inversen!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$