Übungen zur Vorlesung
Mathematik (Lineare Algebra)
Blatt 5

Aufgabe 1. (4 Punkte) Es seien $V_{\mathbb{R}}$ und $V_{\mathbb{C}}$ der Körper der komplexen Zahlen, betrachtet als Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, $z \mapsto \bar{z}$ bzw. $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, $z \mapsto \bar{z}$ linear sind.

Aufgabe 2. (2 + 3 + 3 Punkte) Es seien K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume, U ein Unterraum von V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $\nu : V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ ist linear.

(ii) Eine lineare Abbildung $g : V/U \to W$ mit $f = g \circ \nu$ existiert genau dann, wenn $U \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ gilt. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt, d. h. ist $h : V/U \to W$ eine lineare Abbildung mit $f = h \circ \nu$, so gilt $g = h$.

(iii) $V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$.

Aufgabe 3. (3 + 3 Punkte) Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

(i)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 20x_3 &= -10 \\ x_1 \phantom{{}+6x_2} - 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellwertigen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -6 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sie finden die Übungsblätter auch auf dem WWW-Server der Fakultät für Mathematik und Informatik unter der URL
`http://www.minet.uni-jena.de/algebra/`