

Übungen zur Vorlesung Mathematik (Lineare Algebra)

Blatt 11

Aufgabe 1. (6 Punkte) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Berechnen Sie die Eigenwerte von A .
- (ii) Finden Sie eine orthogonale Matrix P , so dass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2. (2+5 Punkte) Es sei V der \mathbb{R} -Vektorraum aller Polynome, deren Grad höchstens 2 ist.

- (i) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$, $P \mapsto P'$ nicht diagonalisierbar ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $g : V \rightarrow V$, $P \mapsto (X - 1)P' - P$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis von V , bzgl. der die Matrix von g Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei V ein komplexer Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine unitäre Abbildung. Zeigen Sie:

- (i) Ist λ ein Eigenwert von f , so ist $|\lambda| = 1$.
- (ii) Sind x und y Eigenvektoren von f zu unterschiedlichen Eigenwerten, so sind x und y zueinander orthogonal.