Übungen zur Vorlesung
Mathematik (Lineare Algebra)
Blatt 10

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix der Gestalt $A = \left(\begin{smallmatrix} a & d \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, für die folglich $A^T \cdot A = I$ (Einheitsmatrix) gilt.

(i) Zeigen Sie, dass es ein Winkelmaß φ gibt, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Endomorphismus, der bezüglich der Standard-Basis $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$ beschrieben wird durch eine der Matrizen unter (i). Erklären und begründen Sie die geometrische Bedeutung dieser Endomorphismen.

(iii) Bestimmen Sie $\det A$ für die Matrizen A unter (i) und erläutern Sie die geometrische Bedeutung des jeweiligen Determinantenwertes durch Vergleich der "Zeiger" (e_1, e_2) und $(f(e_1),\ f(e_2))$ auf dem Einheitskreis.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis für den Unterraum $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$.

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ der 3-dimensionale euklidische Vektorraum mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein orthogonaler Endomorphismus, d.h. es gelte $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

(i) Bestimmen Sie die zu f gehörende Matrix A bezüglich der Standard-Basis $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T$, wenn mit einer noch zu bestimmenden Konstanten c gilt: $f(e_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, c\right)^T$, $f(e_3) = e_3$ und $\det A = -1$.

(ii) Zeigen Sie, dass die unter (i) gefundene Matrix orthogonal ist.

(iii) Welche geometrische Bedeutung hat der Endomorphismus f unter der Bedingung (i)?