Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 8

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, b) $\int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt[5]{x}}\,dx$,

c) $\int\limits_0^1 \frac{x}{1-x}\,dx$, d) $\int\limits_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $a > 0,$

e) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\, x\,dx$, f) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$,

g) $\int\limits_3^\infty \frac{3}{x^2}\,dx$, h) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$,

i) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$, j) $\int\limits_{\sqrt{3}}^\infty \frac{1}{9+x^2}\,dx$,

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien E und F Teilmengen eines metrischen Raumes X. Zeigen Sie, dass folgendes gilt.

a) Aus $E \subset F$ folgt $\bar{E} \subset \bar{F}$, b) $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$,

c) $\overline{E \cup F} = \bar{E} \cup \bar{F}$, d) $\overline{E \cap F} \subset \bar{E} \cap \bar{F}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Geben Sie zwei offene Teilmengen E, F von $\mathbb{R}$ an, so dass die vier Mengen $\bar{E} \cap F$, $E \cap \bar{F}$, $\bar{E} \cap \bar{F}$ und $\overline{E \cap F}$ paarweise voneinander verschieden sind.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei $J = [-1, 1]$. $C(J)$ ist bzgl. der Supremum-Metrik ϱ_∞ ein vollständiger metrischer Raum (vgl. Vorlesung). Sei

$$\varrho_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\,dt\,, \qquad f, g \in C(J)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ϱ_1 eine Metrik auf $C(J)$ ist.

b) Geben Sie eine Folge (f_n) in $C(J)$ an, die bzgl. ϱ_1 gegen 0 konvergiert, jedoch bzgl. ϱ_∞ keinen Grenzwert hat.

c) Beweisen Sie, dass $C(J)$ bzgl. ϱ_1 nicht vollständig ist.
Hinweis: Sei

$$f_n(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & , & -1 \le t \le -\frac{1}{n}\,, \\ nt & , & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \quad, \\ 1 & , & \frac{1}{n} \le t \le 1 \quad, \end{array} \right\}$$

für alle $n \ge 1$. Zeigen Sie, dass (f_n) eine Cauchy-Folge ist, die nicht konvergiert.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie jeweils alle ersten partiellen Ableitungen.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2^2\, x_3^3 - x_2 \sin x_3\,, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2\, x_2 + x_3^4)^{10}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

c) $f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1 x_2} + e^{\cos(x_1 + x_2)}\,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

d) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{(x_1 - x_2)}\,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 + x_2 > 0\,.$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (0,0) stetig bzw. differenzierbar sind.

a) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \sin \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ für $x_1^2 + x_2^2 \neq 0,\ f(0,0) = 0$

b) $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$ für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

c) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}$ für $x_1^2 + x_2^2 \neq 0,\ f(0,0) = 0\,.$

Sie finden die Übungsblätter auch auf dem WWW-Server der Fakultät für Mathematik und Informatik unter der URL
`http://www.minet.uni-jena.de/algebra/`