Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis

Blatt 3

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Potenzreihen konvergieren.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} x^n$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)^n}{n^{2n}} x^n$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1} n}{5^n (n^3+1)} x^n$,

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3} x^n$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right) x^n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn (z_n) gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert $(\bar{z}_n)$ gegen $\bar{z}$.

b) (z_n) konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn $\lim\,(\text{Re } z_n) = \text{Re } z$ und $\lim\,(\text{Im } z_n) = \text{Im } z$ gelten.

c) (z_n) ist genau dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, wenn (z_n) konvergent ist.

d) Wenn die Reihe $\sum z_n$ absolut konvergent ist, dann ist sie konvergent.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x+2}$,

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$,

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$,

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$,

e) $\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$,

f) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$,

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{4x}$,

h) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$,

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|}$,

j) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - ax + b} - x\right) \, (a, b \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der Funktion $f(x) = [x],\ x \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = 1/[1/x],\ 0 < x \leq 1$, und $f(0) = 0$ definierte Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.

c) Die Funktion f sei durch $f(x) = \left|\left[x + \frac{1}{2}\right] - x\right|,\ x \in \mathbb{R}$ definiert. Weisen Sie nach, dass f periodisch (mit der Periode 1), stetig und beschränkt ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - a} + \frac{x^6 + 1}{x - b}\ , \quad x \in (a, b),$$

eine Nullstelle hat.

b) Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es ein $x_o \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Weisen Sie nach, dass f an jeder Stelle $x_0 \in (a, b)$ sowohl einen linksseitigen als auch einen rechtsseitigen Grenzwert hat.
