

Übungen zur Vorlesung Mathematik 2 – Analysis**Blatt 11****Aufgabe 1** (8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

- a) $\int_E \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} dx_1 dx_2$, $E = \{(x_1, x_2) : 1 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2\}$,
- b) $\int_E x_1 x_2 dx_1 dx_2$, $E = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq R, x_1 \leq x_2 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2}\}$,
- c) $\int_E (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3$, $E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$,
- d) $\int_E x_3 dx_1 dx_2 dx_3$, $E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, x_3 \geq 0\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)Bestimmen Sie jeweils das Volumen der folgenden Mengen $E \subset \mathbb{R}^3$.

- a) $E = \{(x_1, x_2, x_3) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1\}$,
- b) E ist der Durchschnitt der Kugel $K = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$
und des Zylinders $Z = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen.

- a) $\dot{x} = \frac{x}{t}$, $t \neq 0$, $(t_0, x_0) = (-2, 1)$,
- b) $\dot{x} = x \sin t$, $(t_0, x_0) = (\frac{\pi}{2}, -1)$,
- c) $\dot{x} = \frac{1+x^2}{2tx}$, $t \neq 0$, $x \neq 0$, $(t_0, x_0) = (-2, 1)$,
- d) $\dot{x} = \frac{\operatorname{tg} x}{t}$, $t \neq 0$, $|x| < \frac{\pi}{2}$, $(t_0, x_0) = (\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

- a) $\dot{x} = 1 + \frac{x}{t}$, $t \neq 0$, $(t_0, x_0) = (1, 2)$,
- b) $\dot{x} = (x + t)^2$, $(t_0, x_0) = (0, 1)$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = tx + 2x - 3t - 6$.