

## Übungen zur Algebra II

### Blatt 4

#### Aufgabe 14 (2+2+2)

- (i) Geben Sie alle Ideale in  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  an.
- (ii) Welche dieser Ideale sind maximal, welche Primideale?
- (iii) Zeigen Sie:  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

#### Aufgabe 15 (2)

Gegeben sei ein Ideal  $I$  eines kommutativen Rings  $R$ . Zeigen Sie, dass

$$\text{rad}(I) := \{a \in R : \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$$

ein Ideal in  $R$  mit  $I \subseteq \text{rad}(I) = \text{rad}(\text{rad}(I))$  ist. Man nennt  $\text{rad}(I)$  das **Radikal** von  $I$ .

#### Aufgabe 16 (2)

Sei  $K$  ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Ringe  $K[X, Y]/(XY)$  und  $K[X] \times K[Y]$  isomorph sind.

#### Aufgabe 17 (2)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m|n$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \quad x + n\mathbb{Z} \mapsto x + m\mathbb{Z},$$

surjektiv ist.

#### Aufgabe 18 (2)

Sei  $R$  der Ring aller stetigen Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in  $R$ .