B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 07.06.06
Abgabe: 13.06.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 8

Aufgabe 34

Seien K ein Körper, $V := \coprod_{n\in\mathbb{N}} K$ und $R := \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass die freien R-Rechtsmoduln R und R^2 isomorph sind. (Daher besitzt R^2 Basen der Längen 1 und 2.)
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die K-Vektorräume V und V^2 isomorph sind.

Aufgabe 35

(i) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(2a_1, 2^2a_2, 2^3a_3, \ldots) : a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Z}\right\}, \\ B &:= \left\{(3a_1, 3^2a_2, 3^3a_3, \ldots) : a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Untermoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $M := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ mit $M = A + B$ sind.

(ii) Zeigen Sie, dass für den Untermodul $P := \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ von M gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/P, \mathbb{Z}) = 0.$$

(iii) Zeigen Sie, dass M nicht projektiv ist. (Das direkte Produkt projektiver Moduln ist also nicht unbedingt wieder projektiv.)
Hinweis: Nehmen Sie an, dass M direkter Summand eines freien $\mathbb{Z}$-Moduls ist, und beachten Sie, dass P abzählbar, M dagegen überabzählbar ist.

Aufgabe 36

Gegeben seien ein Ring R und kurze exakte Folgen von R-Homomorphismen

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ f\ } P \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\ f'\ } P' \xrightarrow{\ g'\ } M \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei P, P' projektiv sind. Zeigen Sie: $L \times P' \simeq L' \times P$ (Schanuels Lemma).
Hinweis: Betrachten Sie den R-Modul $Q := \{(x, x') \in P \times P' : g(x) = g'(x')\}$.

Aufgabe 37

Gegeben seien ein Ring R, eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ von R-Moduln und ein weiterer R-Modul N. Konstruieren Sie $\mathbb{Z}$-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, N\right) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N), \\ \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i). \end{aligned}$$

Sie finden die Übungsblätter auch auf dem WWW-Server der Fakultät für Mathematik und Informatik unter
`http://www.minet.uni-jena.de/algebra`