B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 24.05.06
Abgabe: 30.05.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 6

Aufgabe 25

Zeigen Sie, dass für Idempotente e, f in einem Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $Re \simeq Rf$.

(2) Es existieren Elemente $a, b \in R$ mit $e = ab$ und $f = ba$.

(3) Es existieren Elemente $a \in eRf,\ b \in fRe$ mit $e = ab$ und $f = ba$.

Aufgabe 26

Gegeben seien Idempotente e, f in einem Ring R mit $e \equiv f \pmod{J(R)}$. Zeigen Sie, dass eine Einheit u in R mit $ufu^{-1} = e$ existiert.

Aufgabe 27

Zeigen Sie, dass für jeden Ring R gilt:

(i) Für R-Moduln M, N und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.

(ii) Für jeden Untermodul N eines R-Moduls M ist $\mathrm{Soc}(N) = N \cap \mathrm{Soc}(M)$ und $\mathrm{Soc}(M) + N/N \subseteq \mathrm{Soc}(M/N)$.

(iii) Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von R-Moduln ist $\mathrm{Soc}(\coprod_{i\in I} M_i) = \coprod_{i\in I} \mathrm{Soc}(M_i)$.

(iv) Der Sockel des regulären R-Linksmoduls R ist ein Ideal in R.

Aufgabe 28

Zeigen Sie:

(i) Für jeden Ring R enthält $J(R)$ genau ein Idempotent (nämlich das Nullelement).

(ii) Für jede Familie $(R_i)_{i\in I}$ von Ringen ist $J(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} J(R_i)$.

(iii) Es gibt einen Ring R, in dem der Sockel des regulären R-Linksmoduls vom Sockel des regulären R-Rechtsmoduls verschieden ist.