B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 17.05.06
Abgabe: 23.05.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 5

Aufgabe 20

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $R := K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $M := K^{n\times 1}$ ein einfacher R-Modul ist.

Aufgabe 21

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und R der Ring aller oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher R-Moduln.

Aufgabe 22

Geben Sie einen Ring R und einen nicht-halbeinfachen R-Modul M mit $\mathrm{Rad}(M) = 0$ an.

Aufgabe 23

Zeigen Sie, dass für einen Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) R ist linksartinsch und einfach.

(ii) $R \cong D^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Schiefkörper D.

(iii) R ist rechtsartinsch und einfach.

Aufgabe 24

Zeigen Sie:

(i) Für halbeinfache Ringe $R_1, \ldots, R_n$ ist auch $R_1 \times \ldots \times R_n$ ein halbeinfacher Ring.

(ii) Für jeden halbeinfachen Ring R und $n \in \mathbb{N}$ ist auch $R^{n\times n}$ ein halbeinfacher Ring.

(iii) Für jedes Ideal I in einem halbeinfachen Ring R ist auch R/I ein halbeinfacher Ring.

(iv) Für jedes Idempotent e in einem halbeinfachen Ring R ist auch eRe ein halbeinfacher Ring.