B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 10.05.06
Abgabe: 16.05.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 4

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass für jeden Ring R gilt:

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ und jeden R-Modul M ist $\mathrm{End}_R(M^n) \cong \mathrm{End}_R(M)^{n\times n}$.

(ii) Sind $M_1, \ldots, M_n$ R-Moduln mit $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ für alle $i \neq j$, so ist

$$\mathrm{End}_R(M_1 \times \ldots \times M_n) \cong \mathrm{End}_R(M_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_R(M_n)\,.$$

(iii) Für jedes Idempotent e in R ist $\mathrm{End}_R(Re) \cong (eRe)^\circ$; insbesondere ist $\mathrm{End}_R(R) \cong R^\circ$.

Aufgabe 17

Für jeden Ring R und jeden R-Modul M nennt man $\mathrm{Ann}(M) := \{r \in R : rM = 0\}$ den **Annullator** von M. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Ann}(M) \trianglelefteq R$.

(ii) Für jedes Ideal I in R mit $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ wird M zu einem R/I-Modul mit $(r+I)m := rm$ für $r \in R, m \in M$.

(iii) Bestimmen Sie den Annullator des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Aufgabe 18

Es sei $A := \left\{\frac{n}{p^k} : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$ für eine Primzahl p. Zeigen Sie, dass $A/\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul artinsch, aber nicht noethersch ist.

Aufgabe 19

Es sei K ein Körper und R der Ring aller oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $M := K^{n\times 1}$ in natürlicher Weise ein R-Modul ist, und bestimmen Sie alle Untermoduln von M.