B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 12.07.06
Abgabe: 18.07.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 13

Aufgabe 56

Gegeben seien ein Ring R und ein R-Linksmodul M. Zeigen Sie:

(i) Die abelsche Gruppe $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ ist ein R-Rechtsmodul mit $(fr)(m) = f(m)r$ für $f \in M^*,\ r \in R,\ m \in M$. (Man nennt M^* den zu M **dualen** R-Rechtsmodul.)

(ii) Zu jedem R-Linksmodul N kann man analog einen **dualen** R-Linksmodul N^* definieren.

(iii) Es existiert (wie in der Linearen Algebra) stets ein kanonischer R-Homomorphismus $\varepsilon_M : M \to M^{**}$.

(iv) Ist M projektiv, so ist ε_M injektiv.

(v) Ist M endlich erzeugt und projektiv, so ist ε_M bijektiv, und M^* ist auch projektiv.

(vi) Ist $M = Re$ für ein Idempotent $e \in R$, so ist $M^* \simeq eR$.

Aufgabe 57

Gegeben seien ein Ring R und ein R-Modul M. Wir setzen $S := \mathrm{End}_R(M)$ und $T := \mathrm{End}_S(M)$. Zeigen Sie: $Z(S) = Z(T)$.

Aufgabe 58

Gegeben seien ein Ring R, ein R-Modul M und ein Ideal I in R. Zeigen Sie, dass die R-Moduln $R/I \otimes_R M$ und M/IM isomorph sind. (Dabei besteht IM aus allen endlichen Summen der Form $x_1m_1 + \ldots + x_km_k$ mit $x_1, \ldots, x_k \in I,\ m_1, \ldots, m_k \in M$.)

Aufgabe 59

Zeigen Sie, dass zu jedem $\mathbb{Z}$-Modul A und jedem $a \in A$ mit $a \neq 0$ ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ mit $f(a) \neq 0$ existiert.