B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 21.04.06
Abgabe: 25.04.06

Übungen zur Ringtheorie

Blatt 1

Aufgabe 1

Es sei $R := K^{n\times n}$ der volle Matrixring des Grades n über dem Körper K. Zeigen Sie, dass jedes linksinvertierbare Element $a \in R$ auch rechtsinvertierbar ist (und umgekehrt). Bestimmen Sie das Zentrum $Z(R)$.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie ein Element a eines Rings R, das links-, aber nicht rechtsinvertierbar ist.

Aufgabe 3

Es seien a, b Elemente eines Rings R. Zeigen Sie, dass mit $1 - ab$ auch $1 - ba$ linksinvertierbar (bzw. invertierbar) ist. Geben Sie ggf. ein explizites (Links-) Inverses an.

Aufgabe 4

Es sei K ein Körper und $J \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass der von den Potenzen $J^i (i \in \mathbb{N}_0)$ aufgespannte Untervektorraum $K[J]$ ein Teilring von $K^{n\times n}$ ist. Beweisen Sie ferner, dass der **Zentralisator**

$$C(J) := \{A \in K^{n\times n} : JA = AJ\}$$

ein Teilring von $K^{n\times n}$ ist. Im folgenden sei J ein Jordanblock, d.h. von der Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{für ein } \lambda \in K.$$

Berechnen Sie $C(J)$ und alle Idempotente in $C(J)$.

Aufgabe 5

Geben Sie alle maximalen Ideale und alle Primideale in $\mathbb{Z}$ an.